مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی



از اِردوش تا کی‌یِف

تألیف راس هانسبرگر

ترجمهٔ علی ساوجی

انتشارات فاطمی

با رونق گرفتن مسابقات ریاضی داخلی و بین المللی هر سال بر تعداد علاقه مندان به شرکت در این مسابقات افزوده می‌شود که برگزاری آنها نقش مهمی در پیشرفت آموزش کشور دارد و نیاز به کتابهای جدید و اسلوبمندی را طلب می کند.

کتاب **From Erdös to Kiev** یکی از کتابهایی است که مؤلف آن بر روشهای اساسی حل مسائل و بیان روشن و بدون استفاده از تکنیکهای پیچیده تبحری بسزا دارد.

در این کتاب راه‌حل مسأله‌های بسیاری که در المپیادهای ملی کشورهای مختلف و المپیادهای بین المللی، از شاخه‌های گوناگون ریاضیات مقدماتی از جمله هندسه، نظریهٔ اعداد، احتمالات و ترکیبیات، مطرح شده اند تشریح شده است تا داوطلبان شرکت دراین المپیادها آمادگی لازم را پیدا کنند.

ترجمهٔ فارسی این کتاب که با عنوان **از اِردوش تا کی یِف** انتشار یافته است برای دانش آموزان علاقه مند به شرکت در مسابقات ریاضی درسطح المپیادهای ریاضی، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه مندان مفید خواهد بود.

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی



زیر نظر :

یحیی تابش

عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

امید علی کرمزاده

عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی



از اِردوش تا کی یِف

تألیف راس هانسبرگر

ترجمهٔ علی ساوجی

انتشارات فاطمی

From Erdös To Kiev
Problems of Olympiad Caliber
Ross Honsberger
The Mathematical Association of America, 1996

از اِردوش تا کی‌یِف

مؤلف: راس‌هانسبرگر
مترجم: علی ساوجی
ویراستار: ارشک حمیدی
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ دوم، ۱۳۸۱
شابِک ۹۶۴-۳۱۸-۲۶۹-x
ISBN 964-318-269-x
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: زهرا قورچیان
- حروفچینی و صفحه‌بندی (TEX-پارسی): زهره امینی
- صفحه‌آرا: ساقی جهانشاهی‌قاجار
- نمونه‌خوان: فاطمه صادقی
- نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ حدیث



مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ - خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۹۶۱۴۲۲ - ۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۹۵۶۲۵۸
info@fatemi.ir

هانسبرگر، راس، ۱۹۲۹ - **Honsberger, Ross**
از اردوش تا کی‌یف / مؤلف راس هانسبرگر؛ مترجم علی ساوجی؛ ویراستار ارشک حمیدی؛ زیر نظر یحیی تابش، امیدعلی کرمزاده. ــ تهران: فاطمی، ۱۳۷۷.
ده، [۲۲۶] ص.: مصور.
ISBN 964-318-269-x
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان دیگر: مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی.
عنوان اصلی: From Erdös to Kiev: Problems of olympiad caliber.
کتابنامه: ص. ۲۲۳.
چاپ دوم: ۱۳۸۱
۱. المپیادها (ریاضیات). ۲. ریاضیات -- مسائل، تمرینها و غیره. ۳. ریاضیات -- مسابقه‌ها. ۴. ریاضیات -- سرگرمیها. الف. ساوجی، علی، ۱۳۴۶- ، مترجم. ب. عنوان. ج. عنوان: مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی.
۳۷۳/۲۳۸ LB۳۰۶۰/۲۴/الف۲۸۴
۱۳۷۷
کتابخانهٔ ملی ایران ۱۵۲۶۷-۷۷م

فهرست

به‌نام خدا

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: **عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان**. هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست‌ویکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این‌رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر **المپیاد ریاضی** اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ **اتووش** به نام بارون **لوراند اتووش**[1] به‌صورت مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به‌کار گرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی **المپیاد بین‌المللی ریاضی** شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در

1. Baron Loránd Eötvös

سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی** به انتشار **مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی** اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضی ۲ نظام جدید در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

* * *

کتاب حاضر از دستهٔ دوم و شامل مسأله‌هایی است که در المپیادهای ملی کشورهای مختلف و یا در المپیادهای بین‌المللی مطرح شده‌اند. بیشتر مسأله‌های کتاب از مباحثی چون هندسه، احتمالات، ترکیبیات و نظریهٔ اعداد انتخاب و همهٔ آنها حل شده‌اند. مطالعهٔ این کتاب به دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقاتی از نوع المپیادهای ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان توصیه می‌شود.

پیشگفتار

بی‌تردید از برگزاری مسابقه‌های کوچک دوستانه بهرهٔ زیادی عاید جامعهٔ جهانی می‌شود. با وجود این، در آزمونهای سطوح پیشرفته این وسوسه وجود دارد که ارزشهای زیباشناختی را در برابر توانایی مطلق در به‌دست آوردن نتیجه‌ها قربانی کنند. طی این سالها، با گرمتر شدن بازار مسابقات ریاضی منطقه‌ای، ملی و بین‌المللی، بسیاری از دانش‌آموزان جوان و توانا آنقدر مشتاق کسب تسلط بر تکنیکهای متعددند که بیم آن می‌رود که در نهایت این تکنیکها جزءِ عادتهای ذهنی آنها شود و این امر به ناتوانی همیشگی آنها در درک زیبایی ریاضیات مقدماتی بینجامد. همواره این فکر در ذهنم بوده که خطر اصلی تحصیل در مقطع دکتری این است که مطالعات لازم برای کسب این عنوان، آنقدر فشرده، زیاد و طولانی‌مدت‌اند که این خطر اساسی وجود دارد که توانایی فرد در مطالعه به‌حدی تحلیل یابد که فقط بتواند «مطالب را ورق بزند». دوست دارم تصور کنم که مربیان تیمهای جوانانمان در مسابقات ریاضی هیچ‌گاه در یادآوری این مطلب به آنها کوتاهی نمی‌کنند که علت اصلی اینکه ریاضیدانهای بزرگ اینقدر سختکوش و پربار بوده‌اند شیفتگی بیش از اندازهٔ آنها به مطلب موردنظرشان بوده است. برای هدایت‌کنندگان برنامه‌های آموزشی کار آسانی نیست که از ترویج این دیدگاه که ارزش هر ایده در فایده‌اش نهفته است ممانعت کنند. این روزها زیاد نمی‌شنویم که شخصی بعدازظهر لذتبخشی را با مطالعهٔ کتاب جالبی دربارهٔ ریاضیات گذرانده باشد. حتی ممکن است مسأله‌ای مقدماتی اما خوب، بسیار جذاب و راه‌حل ابتکاریش شدیداً هیجان‌انگیز باشد. اینها همان احساساتی هستند که امیدوارم مجموعهٔ حاضر در خواننده‌اش ایجاد کند. مسائل این کتاب تا حدی دشوارند و با اینکه داوطلبان شرکت در المپیادها می‌توانند مطالبی از آنها بیاموزند، هدف اصلیم سهیم کردن خوانندگان معمولی در لذت بردن از زیباییهای ریاضیات مقدماتی است.

من با بیشتر مسائل این کتاب در بخشهای المپیاد دوره‌های ۱۹۸۷ و ۱۹۸۸ مجلهٔ کروکس ماتماتیکوروم[1] که انجمن ریاضی کانادا آن‌را چاپ می‌کند برخورد کرده‌ام. این مجلهٔ ادواری در نوع خود بی‌نظیر و مایهٔ افتخار تمام کسانی است که در برتریش مؤثرند. اگرچه ممکن است بسیاری از راه‌حلهای من طی کردن روال عادی باشند، ولی بیش از نیمی از راه‌حلهای موجود در گردایهٔ حاضر از ابداعات من است. هنگامی که راه‌حلی مربوط به شخصی دیگر است، ضمن کار نام او را ذکر کرده‌ام، ولی چون مطالب را به سلیقهٔ خودم نوشته‌ام، آنها هیچ‌گونه دخالتی در نقایص موجود در ارائهٔ مطالب ندارند.

راس هانسبرگر

1. Crux Mathematicorum

هفت راه‌حل از جورج اِواگِلوپولُس

جورج اواگلوپولس در حال حاضر (۱۹۹۵) وکیل دعاوی جنایی در آتن پایتخت یونان است. او شیفتهٔ ریاضیات است و در دوران دانشجویی‌اش، یعنی هنگامی‌که راه‌حلهای زیر را پیدا کرده است، بخش زیادی از اوقات فراغتش را صرف حل کردن مسأله‌های ریاضی می‌کرد. در اینجا نمونه‌ای از راه‌حلهای او را که در این سالها در مجلهٔ کروکس ماتماتیکوروم چاپ شده است می‌بینید.

هنوز هم جورج در ریاضیات فعال است و در حال حاضر ویراستار ارشد ویرایش یونانی مجلهٔ معتبر کوانتوم است.

۱. مسألهٔ ۱

(این مسأله مربوط به المپیاد استرالیا در سال ۱۹۸۳ است. ک. کوپِر از دانشگاه دولتی میسوری مرکزی و جان مورویِ از شهر دالاس در ایالت تگزاس هم آن‌را حل کرده‌اند [۱۹۸۵، ۷۱].)

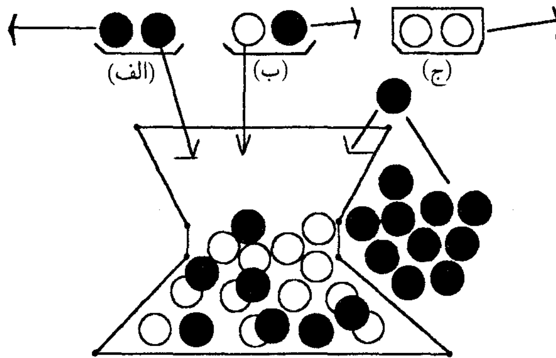
در ظرفی بزرگ ۷۵ توپ سفید و ۱۵۰ توپ سیاه وجود دارد و درکنار این ظرف تودهٔ انبوهی از توپهای سیاه قرار دارد. اینک عملیات دو مرحله‌ای زیر را به‌طور متوالی انجام می‌دهیم. ابتدا به‌تصادف دو توپ از ظرف بیرون می‌آوریم و سپس

الف) اگر هردو سیاه باشند، یکی را به ظرف برمی‌گردانیم و دیگری را کنار می‌گذاریم،

ب) اگر یکی سیاه و دیگری سفید باشد، توپ سفید را به ظرف برمی‌گردانیم و توپ سیاه را کنار می‌گذاریم،

ج) اگر هردو سفید باشند، هردو را کنار می‌گذاریم و یکی از توپهای سیاه تودهٔ کناری را درون ظرف می‌اندازیم.

بنابراین، در هر صورت، در هر مرحله دو توپ از ظرف خارج و تنها یک توپ به درون آن انداخته می‌شود و به این ترتیب تعداد توپهای موجود در ظرف یک واحد کاهش می‌یابد. پس در نهایت به وضعیتی می‌رسیم که تنها یک توپ در ظرف وجود دارد. سؤال این است که «رنگ آخرین توپ چیست؟»



شکل۱

راه‌حل

به‌سادگی معلوم می‌شود که تعداد توپهای سیاه درون ظرف در هر مرحله همواره یک واحد تغییر می‌کند (این تعداد در (الف) و (ب) یکی کم و در (ج) یکی زیاد می‌شود). از آنجا که به‌طور قطع تعداد توپها به یک می‌رسد، سرانجام در مرحله‌ای تعداد توپهای سیاه باید به هریک از عددهای ۱۵۰، ۱۴۹، ۰۰۰، ۱ و یا حتی صفر برسد، اگرچه در اینکه این حالت روی دهد کمی تردید وجود دارد. این کشف کمک زیادی به حل مسأله نمی‌کند، زیرا نمی‌دانیم زمانی که تعداد توپهای سیاه به یک می‌رسد هنوز توپ سفیدی باقی مانده است یا خیر. با این حال، اگر به چگونگی تغییر تعداد توپهای سفید دقت کنیم، روش حل مسأله تا حدی روشن می‌شود. بد شد که از اول چنین چیزی را در نظر نگرفتیم.

در حالتهای (الف) و (ب) تعداد توپهای سفید تغییر نمی‌کند و در حالت (ج) از این تعداد دو واحد کم می‌شود. بنابراین زوجیت تعداد توپهای سفید همواره یکسان است. از آنجا که این تعداد در ابتدا ۷۵، یعنی عددی فرد بوده، بنابراین در تمام مراحل نیز فرد باقی می‌ماند و این نتیجه ما را مطمئن می‌سازد که باید همواره دست‌کم یک توپ سفید در ظرف وجود داشته باشد. پس آخرین توپ الزاماً سفید است.

از طرف دیگر اگر در ابتدا تعداد توپهای سفید عددی زوج بود، امکان نداشت که در آخر یک (که عددی فرد است) توپ سفید باقی بماند و در نتیجه آخرین توپ سیاه خواهد بود.

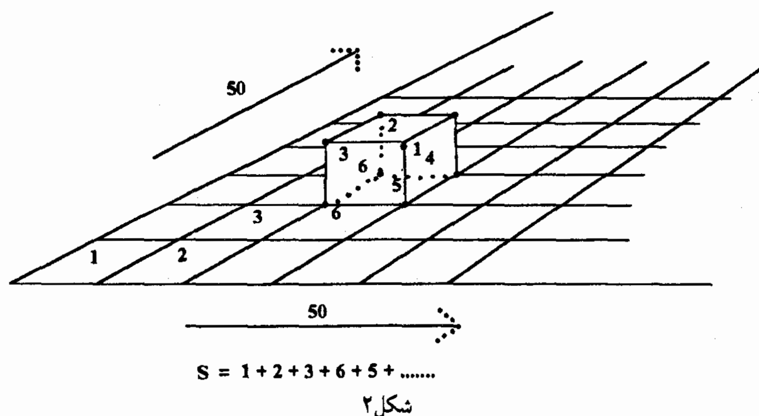
۲. مکعب و صفحهٔ شطرنج

(از المپیاد مسکو، ۱۹۷۳ [۱۹۹۰، ۳۵])

این مسأله مربوط به صفحهٔ شطرنجی ۵۰ × ۵۰ و مکعبی است که وجه‌های آن هم‌اندازهٔ مربعهای صفحهٔ شطرنج است. مکعب را که ابتدا در گوشهٔ سمت چپ پایین صفحه قرار دارد، متوالیاً حول یکی از یالهای قاعده‌اش می‌غلتانیم تا روی صفحه از مربعی به مربع دیگر برود و نهایتاً به‌گوشهٔ مقابل برسد. در هر حرکت

فقط مجازیم مکعب را به طرف راست یا به طرف بالای صفحهٔ شطرنجی بغلتانیم. حتی با این محدودیتها، برای رسیدن به گوشهٔ مقابل راههای بسیار زیادی وجود دارد که از ترکیبهای ۴۹ گام به طرف راست و ۴۹ گام به طرف بالا به‌دست می‌آیند (در حقیقت تعداد این راهها $\binom{98}{49}$، یعنی عددی ۲۹ رقمی است).

حال فرض کنید که روی هریک از وجه‌های این مکعب یکی از عددهای ۱، ۲، ۳ ، ۴، ۵ و ۶ نقش بسته است به‌طوری‌که مجموع عددهای واقع بر وجه‌های مقابل ۷ باشد. همچنین فرض کنید وقتی‌که مکعب روی یکی از مربعها قرار می‌گیرد، عددی که واقع بر وجه پایینی آن است روی مربع ثبت می‌شود. از آنجا که طبق قوانین مجاز نیستیم مکعب را روی مربعی برگردانیم که پیش از آن شماره خورده است، پس از خاتمهٔ غلتاندن مکعب، در مجموع ۹۹ مربع، ۹۹ = ۴۹ + ۴۹ + ۱، شماره‌هایی از عددهای صحیح خورده‌اند. بیشترین و کمترین مقدار S ، یعنی مجموع عددهای صحیح واقع بر این ۹۹ مربع، چقدر است؟



شکل۲

راه‌حل

کوشش برای دنبال کردن یکی از راههای نوعی، حتی در چند غلتش اوّل، نیاز به قدرت تصوری نامتعارف دارد. با وجود این، با کمی تلاش می‌توان تصویر به حد کافی روشنی از مسأله به‌دست آورد و به این ترتیب، با استفاده از روش سادهٔ زیر به کلید حل مسأله دست یافت:

> چون نمی‌توانیم روی صفحهٔ شطرنجی به طرف چپ برگردیم یا به طرف پایین حرکت کنیم، پس هر وجه پایینی مکعب پیش از اینکه دوباره عددی را روی مربعی ثبت کند باید به بالای مکعب بیاید.

اینک وقتی وجهی که عدد x روی آن نوشته شده است بالای مکعب قرار دارد، وجه مقابل آن عدد $7 - x$ را ثبت می‌کند. از آنجا که هر عدد پیش از ثبت شدن مجدد باید به بالای مکعب بیاید، بین هر دو

باری که عدد $۷ - x$ ثبت می‌شود، جایی باید x ثبت شده باشد. به عبارت دیگر در هر مسیر عضوهای جفت مکمل $(x, ۷ - x)$ یکی‌درمیان و در فاصله‌های مختلف ظاهر می‌شوند و این فاصله‌ها بسته به اینکه شرایط چه باشد، با یکی از عضوهای این جفت آغاز می‌شوند. بعد از هر جفتی مانند $(x, ۷ - x)$ ممکن است یک x یا یک $۷ - x$ اضافه، به‌عنوان اولین عضو مربوط به جفت آخر ناقص، ظاهر شود.

$$\cdots \overset{\frown}{x \cdots ۷ - x} \cdots \overset{\frown}{x \cdots ۷ - x} \cdots - - - - \cdots \overset{\frown}{x \cdots ۷ - x} \cdots$$

$$\cdots ۷ - \overset{\frown}{x \cdots x} \cdots ۷ - \overset{\frown}{x \cdots x} \cdots - - - - \cdots ۷ - \overset{\frown}{x \cdots x} \cdots ۷ - x \cdots$$

پس برای مثال ممکن است در طرف راست جفت مکمل $(۱,۶)$ یا در ادامهٔ دنباله هیچ‌گاه ۱ یا ۶ ظاهر نشود و یا دقیقاً یک ۱ یا یک ۶ به‌عنوان اولین عضو جفتی ناقص آمده باشد. جفتهای $(۲,۵)$ و $(۳,۴)$ نیز وضعیت مشابهی دارند. چون بیش از سه جفت ناقص وجود ندارد، حداکثر با سه تا از این ۹۹ عدد نمی‌توان جفت مکمل کاملی درست کرد.

اینک بدیهی است که این جفتهای مکمل تعداد زوجی از ۹۹ مکان را در دنباله اشغال می‌کنند و در نتیجه تعداد جفتهای ناقص فرد است. در نتیجه فقط ممکن است یک یا سه جفت ناقص داشته باشیم، یعنی وقتی‌که به‌ترتیب ۴۹ یا ۴۸ جفت مکمل کامل وجود دارد.

از آنجا که مجموع هر جفت مکمل کامل ۷ است، مجموع حاصل از ۴۹ جفت مکمل کامل در S برابر است با $۳۴۳ = ۷ \times ۴۹$، و یک جفت ناقص این مجموع را به‌اندازهٔ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و یا ۶ افزایش می‌دهد. بنابراین در این حالت S عددی بین ۳۴۴ و ۳۴۹ است.

ولی مجموع حاصل از ۴۸ جفت مکمل کامل در S برابر است با $۳۳۶ = ۷ \times ۴۸$، و عددهای صحیح باقی‌مانده از جفتهای $(۱,۶)$، $(۲,۵)$ و $(۳,۴)$ به مجموع S مقداری بیش از $۱۵ = ۴ + ۵ + ۶$ و کمتر از $۶ = ۳ + ۲ + ۱$ نمی‌افزایند. بنابراین مقدار ماکسیمم $۳۵۱ = ۱۵ + ۳۳۶$ و مقدار مینیمم $۳۴۲ = ۶ + ۳۳۶$ است.

اثبات اینکه این کرانها واقعاً دست‌یافتنی هستند کار ساده‌ای است (که آن‌را به خواننده واگذار می‌کنیم). پس نتیجه این است که مقدارهای اکسترمم در حقیقت ۳۵۱ و ۳۴۲ هستند.

آیا جالب توجه نیست که تعداد بسیار زیادی از مقادیر ممکن S، یعنی این تعداد از آنها

$$\binom{۹۸}{۴۹} = ۲۵۴۷۷۶۱۲۲۵۸۹۸۰۸۵۶۹۰۲۷۳۰۴۲۸۶۰۰$$

همگی در نوار باریکی از ۱۰ عدد صحیح جای می‌گیرند؟

۳. مسألهٔ M۱۰۵۶

(کوانت، ۱۹۸۷، از آ. س. مرکوری‌یف [۱۹۹۰، ۱۰۴])

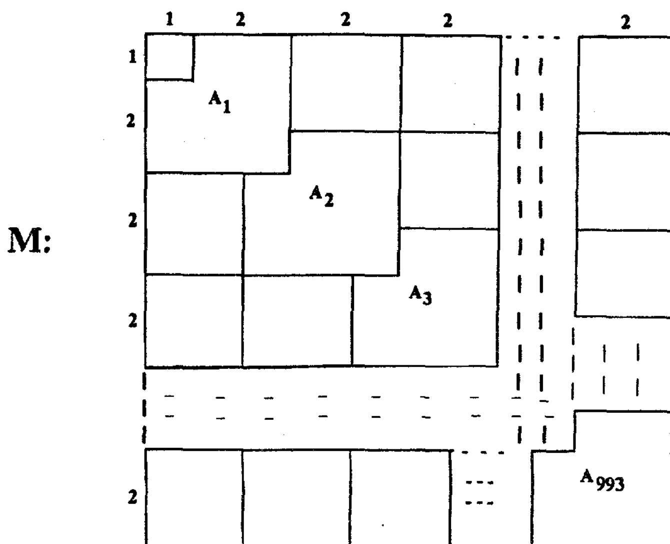
فرض کنید هریک از درایه‌های ماتریسی ۱۹۸۷×۱۹۸۷ مانند M، عددی حقیقی است که از ۱ بزرگتر

نیست. همچنین فرض کنید که این درایه‌ها به‌دقت طوری انتخاب و مرتب شده باشند که مجموع چهار درایهٔ هر زیرماتریس ۲ × ۲ آن مساوی با صفر باشد. ثابت کنید مجموع همهٔ درایه‌های M از ۱۹۸۷ بیشتر نیست.

راه‌حل

از آنجا که می‌توانیم در مجموع درایه‌های M درایه‌های هر زیرماتریس ۲ × ۲ را حذف کنیم، نخستین فکری که به ذهن می‌رسد این است که تا حد ممکن زیرماتریسهای ۲ × ۲ را حذف کنیم و امیدوار باشیم که حداکثر ۱۹۸۷ درایه باقی بماند، زیرا در این صورت با توجه به این فرض که درایه‌ها از ۱ بزرگتر نیستند درستی حکم به‌دست می‌آید. اگر از گوشهٔ سمت چپ در پایین شروع و سطرها و ستونهای مربوط به بخشهای ۲ × ۲ را حذف کنیم، در نهایت ماتریسی ۱۹۸۶ × ۱۹۸۶ که در همان گوشه واقع است حذف می‌شود. متأسفانه با این کار سطر اول و ستون آخر ماتریس M که شامل ۱ − ۱۹۸۷ × ۲ درایه هستند دست‌نخورده باقی می‌ماند. این تعداد خیلی بیشتر از آن چیزی است که انتظار داشتیم. بنابراین نتیجه می‌گیریم که این روش حل تا آن حد که امیدوار بودیم ساده نیست.

با وجود این تردیدی نیست که حذف تعداد زیادی از زیرماتریسهای ۲ × ۲ در هر برهانی از مسأله نقشی اساسی دارد. در اینجا مشکل اصلی یافتن تجزیه‌ای از M است که در آن پس از حذف همهٔ زیرماتریسهای ۲ × ۲ بتوان به‌سادگی ثابت کرد که مجموع همهٔ درایه‌های باقی‌مانده بیش از ۱۹۸۷ نیست. راه‌حل جورج گوهری زیباست!



شکل۳

مطابق شکل اگر اولین درایهٔ M را جداگانه در نظر بگیریم، می‌توانیم بقیهٔ ماتریس M را به زیرماتریسهایی ۲ × ۲ و ۹۹۳ = (۱ − ۱۹۸۷)$\frac{۱}{۲}$ بخش L_مانند تقسیم کنیم که عرض همهٔ آنها ۲ و طولشان به ترتیبی ۳، ۵، ۷، ... و ۱۹۸۷ است. می‌توان بازوی هریک از شکلهای L_مانند را به بخشهای ۲ × ۲ و مجاور هم تقسیم کرد به‌طوری‌که این بخشها در طول بازوها امتداد می‌یابند و به قطعه‌ای گوشه‌ای مانند A منتهی می‌شوند که ماتریسی ۳ × ۳ است و گوشهٔ سمت چپ بالای آن حذف شده است. بنابراین S، یعنی مجموع همهٔ درایه‌های M، برابر است با مجموع درایهٔ اول و ۹۹۳ مجموع مربوط به قطعه‌های گوشه‌ای، یعنی A_iها.

ولی با کمی کوشش معلوم می‌شود که مجموع درایه‌های هریک از قطعه‌های گوشه‌ای مانند A_i بیشتر از ۲ نیست.

$\mathbf{A_i}$:

	a	b
e	d	c
f	g	h

مجموع درایه‌های A_i

$$= (a+b+c+d)+e+f+g+h$$
$$= \quad ۰ \quad +(e+f+g+d)+h-d$$
$$= \quad ۰ \quad + \quad ۰ \quad +h-d$$
$$\leqslant ۲ \quad \text{چون } |h|,|d| \leqslant ۱ \text{ ،}$$

بنابراین همان‌طورکه می‌خواستیم $S \leqslant ۱ + ۹۹۳(۲) = ۱۹۸۷$.

۴. مسابقات کورشاک

(مجارستان، ۱۹۸۳ [۱۹۸۹، ۲۳۰])

چندجمله‌ای $f(x)$ را در نظر بگیرید که در آن اولین و آخرین ضریب ۱ است و ضریبهای میانی، a_iها، همه نامنفی‌اند:

$$f(x) = x^n + a_۱x^{n-۱} + a_۲x^{n-۲} + \cdots + a_{n-۱}x + ۱$$

آیا جالب نیست که اگر معادلهٔ $f(x) = ۰$، n ریشهٔ حقیقی داشته باشد، مقدار $f(۲)$ باید دست‌کم ۳^n باشد؟

این نتیجهٔ دور از ذهن را ثابت کنید: $f(۲) \geqslant ۳^n$.

راه‌حل

از آنجا که همهٔ a_iها از صفر کمتر نیستند، اگر به‌جای x عدد نامنفی دلخواهی بگذاریم، مقدار $f(x)$ دست‌کم ۱ خواهد بود. در نتیجه همهٔ ریشه‌های $f(x) = ۰$ باید عددهایی منفی چون $-r_۱$، $-r_۲$، ... و $-r_n$ باشند. با استفاده از این ریشه‌ها $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$f(x) = x^n + a_۱x^{n-۱} + a_۲x^{n-۲} + \cdots + a_{n-۱}x + ۱$$

$$= (x + r_1)(x + r_2)(x + r_3)\cdots(x + r_n)$$
$$= x^n + (r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x^{n-1} + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots)x^{n-2}$$
$$+ \cdots + r_1 r_2 \cdots r_n$$

بنابراین هریک از a_kها از دستور زیر به‌دست می‌آید

$$a_k = \text{مجموع } \binom{n}{k} \text{ تا حاصل‌ضرب } k \text{ تایی ریشه‌ها}$$
$$= \sum r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k}$$

همچنین جملهٔ ثابت، یعنی $r_1 r_2 \cdots r_n$، برابر با ۱ است.

اینک با استفاده از نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی دربارهٔ $\binom{n}{k}$ جمله‌ای که a_k را می‌سازند، نتیجه می‌شود

$$\frac{a_k}{\binom{n}{k}} = \frac{\sum r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k}}{\binom{n}{k}} \geqslant \left[\prod r_{i_i} r_{i_2} \cdots r_{i_k}\right]^{1/\binom{n}{k}}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$a_k \geqslant \binom{n}{k} \left[\prod r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k}\right]^{1/\binom{n}{k}}$$

مسلماً این نتیجه چندان امیدبخش نیست. با این حال، این حاصل‌ضرب دست و پاگیر با توجه به این نکتهٔ ارزشمند از بین می‌رود که چون هیچ‌یک از r_iها بر دیگری ارجحیت ندارد، بنابراین حاصل‌ضرب موردنظر r_iها به دفعات مساوی ظاهر می‌شوند. در نتیجه به‌ازای عدد صحیحی چون t،

$$\prod r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k} = (r_1 r_2 \cdots r_n)^t$$
$$= 1^t = 1$$

بنابراین

$$a_k \geqslant \binom{n}{k}$$

اینک توجه می‌کنیم که k از ۱ تا $n - 1$ تغییر می‌کند، بنابراین اگر فرض کنیم $a_0 = a_n = 1$، آنگاه a_0 و a_n به‌ترتیب مساوی با $\binom{n}{0}$ و $\binom{n}{n}$ هستند. در نتیجه

$$a_k \geqslant \binom{n}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

و مقدار $f(۲)$ برابر است با $\sum_{k=۰}^{n} a_k ۲^{n-k}$. چون $a_k \geqslant \binom{n}{k}$، پس

$$f(۲) \geqslant \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۲^{n-k} = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۱^k ۲^{n-k}$$

$$= (۱+۲)^n \quad \text{بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای،}$$

$$= ۳^n$$

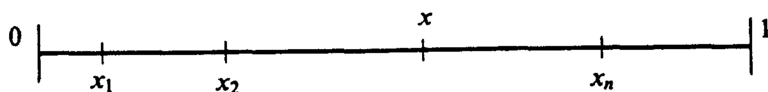
که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۵. مسألهٔ ۵

(این مسأله مسألهٔ دیگری از استرالیاست [۱۹۸۵، ۷۰] که و. ن. مورتی از دانشگاه دولتی پنسیلوانیا نیز آن‌را حل کرده است.)

ثابت کنید که اگر n عدد $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$ و x_n به‌طور دلخواه از بازهٔ بستهٔ واحد، $[۰, ۱]$، انتخاب شوند، همواره می‌توانیم عددی مانند x در این بازه طوری بیابیم که میانگین فاصله‌های بی‌علامت آن تا x_iها دقیقاً مساوی $\frac{۱}{۲}$ باشد:

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} |x - x_i| = \frac{۱}{۲}$$



شکل۴

راه‌حل

جورج با انتخاب روشی کاملاً سرراست تابع

$$f(x) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} |x - x_i|$$

را در نظر می‌گیرد. اگر $x = ۰$،

$$f(۰) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} |-x_i| = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i \quad (\text{زیرا } x_i \geqslant ۰)$$

اگر $x = ۱$،

$$f(۱) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} |۱ - x_i|$$

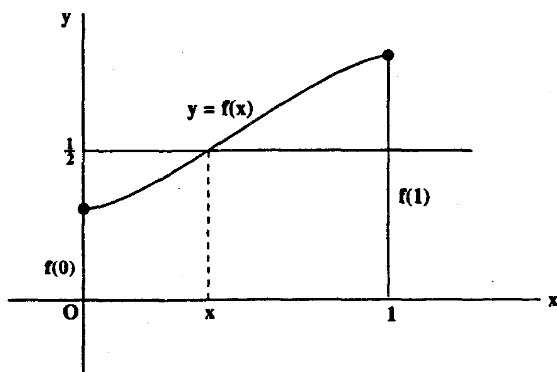
$$= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} (۱ - x_i) \quad (\text{زیرا } x_i \in [۰, ۱])$$

$$= \frac{۱}{n}\left(n - \sum_{i=۱}^{n} x_i\right)$$
$$= ۱ - f(۰)$$

و این رابطهٔ مهم را به‌دست می‌آوریم

$$f(۰) + f(۱) = ۱$$

بنابراین رابطه، یا $f(۱)$ و $f(۰)$ هردو برابر با $\frac{۱}{۲}$ هستند که در این صورت دو جواب برای مسأله یافته‌ایم، و یا $\frac{۱}{۲}$ بین آنها قرار دارد که در این حالت از پیوستگی تابع نتیجه می‌شود به‌ازای xای بین ۰ و ۱، $f(x) = \frac{۱}{۲}$.



شکل۵

۶. مسألهٔ M۱۰۴۳ از کوانت

(کوانت، ۱۹۸۷، از س. و. کُنیاگین [۱۹۹۰، ۱۰۲])

موضوع این مسأله این است که آیا می‌توان مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح $(\cdots, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots)$ را به سه زیرمجموعه افراز کرد به‌طوری‌که به‌ازای هر n، هریک از عددهای صحیح n، $(n - ۵۰)$ و $(n + ۱۹۸۷)$ در یکی از این افرازها قرار داشته باشد؟

راه‌حل

بیایید قبل از اینکه پیش‌داوری کنیم بکوشیم افراز مطلوب را بسازیم. مناسب است که از نمادگذاری زیر استفاده کنیم:

فرض کنید $m \sim k$ به این معنا باشد که m و k به یک زیرمجموعه متعلق‌اند و (m, k, t) به‌معنای این باشد که هریک از عددهای m، k و t به یکی از سه

زیرمجموعهٔ مختلف تعلق دارد. در نتیجه برای مثال (m,k,t) یعنی t با m یا k در یک زیرمجموعه قرار ندارد.

ابتدا دو نتیجهٔ اساسی به‌دست می‌آوریم که لزوماً باید دربارهٔ هر راه موفقیت‌آمیزی برای افراز عددهای صحیح برقرار باشند:

الف) $(n+۱۹۳۷) \sim n$ (یعنی به‌ازای هر عدد صحیح مانند n باید عددهای صحیح n و $(n+۱۹۳۷)$ در یک مجموعه باشند) و

ب) $n \sim (n-۱۵۰)$.

الف) $n \sim (n+۱۹۳۷)$:

چون به‌ازای هر عدد صحیح مانند n باید ویژگی اساسی $(n-۵۰, n, n+۱۹۸۷)$ برقرار باشد، اگر به‌جای n به‌ترتیب مقدارهای $n-۵۰$ و $n+۱۹۸۷$ را قرار دهیم نتیجه می‌گیریم که

$$(n-۱۰۰, n-۵۰, n+۱۹۳۷),\ (n+۱۹۳۷, n+۱۹۸۷, n+۲\times۱۹۸۷)$$

از اولین ویژگی معلوم می‌شود که امکان ندارد عدد $(n+۱۹۳۷)$ با $(n-۵۰)$ در یک زیرمجموعه باشد، و از دومی نیز معلوم می‌شود که این عدد با $(n+۱۹۸۷)$ در یک زیرمجموعه نیست. ولی با توجه به ویژگی اصلی $(n-۵۰, n, n+۱۹۸۷)$، $(n+۱۹۳۷)$ باید با یکی از سه عدد $(n-۵۰)$، n، و یا $(n+۱۹۸۷)$ در یک زیرمجموعه باشد. با کنار گذاشتن دو حالت اول و سوم نتیجه می‌شود که $(n+۱۹۳۷)$ و n باید در یک زیرمجموعه باشند.

به‌عبارت دیگر به‌ازای هر عدد صحیح مانند n تمام جمله‌های تصاعد حسابی n، $(n+۱۹۳۷)$، $(n+۲\times۱۹۳۷)$، $\cdots$، باید در یک زیرمجموعه باشند. به‌ویژه تمام جمله‌های تصاعد $(۰, ۱۹۳۷, ۲\times۱۹۳۷, \cdots)$ باید در یک زیرمجموعه باشند.

از این نتیجهٔ کلی در قسمت (الف) در اثبات ویژگی دوم، $n \sim (n-۱۵۰)$، استفاده می‌کنیم. بنابر ویژگی دوم تمام جمله‌های تصاعد n، $n-۱۵۰$، $(n-۲\times۱۵۰)$ ، $\cdots$، همواره در یک زیرمجموعه قرار می‌گیرند. به‌ویژه اینکه تصاعد $(۶۴۶\times۱۵۰-۵۰)$، $(۶۴۵\times۱۵۰-۵۰)$، $(۶۴۴\times۱۵۰-۵۰)$، $\cdots$، نیز همین ویژگی را دارد.

ب) $n \sim (n-۱۵۰)$:

تاکنون می‌دانیم که ویژگی $(n-۱۰۰, n-۵۰, n-۱۹۳۷)$ باید برقرار باشد. چون همواره n و $(n+۱۹۳۷)$ در یک زیرمجموعه هستند، بنابراین $(n-۱۰۰, n-۵۰, n)$. چون این ویژگی در مورد هر n درست است، نتیجه می‌گیریم $(n-۱۵۰, n-۱۰۰, n-۵۰)$ که از آن نتیجه می‌شود $(n-۱۵۰)$ با هیچ‌یک از عددهای $(n-۱۰۰)$ و $(n-۵۰)$ در یک زیرمجموعه قرار ندارد. با توجه به ویژگی ثابت شدهٔ $(n-۱۰۰, n-۵۰, n)$ نتیجه می‌گیریم که همواره $(n-۱۵۰)$ و n در یک زیرمجموعه هستند.

شاید تاکنون با خود اندیشیده‌اید که عددهای ۱۹۳۷ و ۱۵۰ چه ویژگی جالبی دارند. پاسخ این پرسش این است که

$$۵۰(۱۹۳۷) = ۶۴۶(۱۵۰) - ۵۰ \ (= ۹۶۸۵۰)$$

بنابر ویژگی تصاعد حسابی خاصی که در بالا ذکر شد، رابطه‌های بسیار مهم زیر را به‌دست می‌آوریم

$$۰ \sim ۱۹۳۷ \sim ۲ \times ۱۹۳۷ \sim \cdots \sim ۵۰ \times ۱۹۳۷ = ۶۴۶(۱۵۰) - ۵۰ \sim ۶۴۵(۱۵۰) - ۵۰$$
$$\sim ۶۴۴(۱۵۰) - ۵۰ \sim \cdots \sim ۰ \times (۱۵۰) - ۵۰ = -۵۰$$

که از آنها معلوم می‌شود ۰ و ۵۰− باید در یک زیرمجموعه باشند. ولی این مطلب با ویژگی $(n - ۵۰, n, n + ۱۹۸۷)$، وقتی‌که $n = ۰$، تناقض دارد و در نتیجه افراز موردنظر غیرممکن است!

ممکن است راه‌حلهای دیگری برای این مسأله وجود داشته باشد، ولی آیا راه‌حل جورج حاکی از خلاقیت فوق‌العادهٔ ذهنی او نیست؟ این مجموعهٔ کوچک را با مسألهٔ سادهٔ زیر به پایان می‌بریم.

۷. مسألهٔ M۱۰۵۷ از کوانت

(کوانت، ۱۹۸۷، [۱۹۹۰، ۱۰۵])

فرض کنید دو بازیکن A و B، ابتدا A و سپس B، یکی‌درمیان و مطابق دو قانون زیر عددهایی طبیعی را می‌نویسند:

۱) هیچ‌یک از عددها نباید ازکرانی مانند L که هردو بر آن توافق دارند بیشتر باشد، و

۲) هیچ‌یک از عددها نباید مقسوم‌علیه عدد دیگری باشد که قبلاً از آن استفاده شده است.

اولین بازیکنی که نتواند بازی کند بازنده است.

برای مثال به‌ازای $L = ۱۰$ ممکن است بازی به شکل زیر باشد:

A ابتدا ۱۰ را می‌نویسد (که به این ترتیب ۱، ۲، ۵ و ۱۰ حذف می‌شوند و ۳، ۴، ۶، ۷، ۸ و ۹ هنوز قابل استفاده‌اند)؛

B، ۴ را می‌نویسد (که در نتیجه فقط خود ۴ حذف می‌شود و ۳، ۶، ۷، ۸ و ۹ قابل استفاده‌اند)؛

A، ۷ را می‌نویسد (که در نتیجه ۳، ۶، ۸ و ۹ باقی می‌ماند)؛

و B، ۸ را می‌نویسد (که فقط ۳، ۶ و ۹ باقی می‌ماند)،

اینک اگر A ساده‌لوحانه ۶ را بنویسد، که به این ترتیب ۳ حذف می‌شود، B با نوشتن ۹ برنده می‌شود؛ ولی A با نوشتن ۳ می‌برد، زیرا در این صورت باید عددهای ۶ و ۹ را نوشت، که یکی را B می‌نویسد و دیگری را A.

بنابراین امکان برد برای هر دو طرف وجود دارد. با وجود این ثابت کنید به‌ازای هر کرانی مانند L ترفندی برای اینکه A ببرد وجود دارد.

راه‌حل

تأکید می‌کنیم که لازم نیست ترفندی برای اینکه A ببرد بیابیم، بلکه باید ثابت کنیم چنین چیزی وجود دارد. از آنجا که باید یکی از دو بازیکن برنده شود (زیرا ممکن نیست هریک از آن‌دو اولین کسی باشد که نمی‌تواند بازی کند)، پس اگر بتوانیم ثابت کنیم برای اینکه B ببرد ترفندی در روش بازی وجود ندارد، آن‌وقت معلوم می‌شود که باید روشی برای بازی کردن وجود داشته باشد که اگر A آن‌را در پی گیرد B موفق نشود. یعنی وجود ترفندی را برای اینکه A ببرد ثابت کرده‌ایم. در اینجا از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض کنید ترفندی برای اینکه B ببرد وجود داشته باشد. در این صورت B می‌تواند همهٔ حرکتهای اول ممکنی را که A انجام می‌دهد جواب دهد. اینک، چون ۱ مقسوم‌علیه همهٔ عددهای صحیح است، اگر قرار باشد زمانی عدد ۱ نوشته شود، A باید در اولین حرکتش این کار را بکند. ترفند B باید بتواند با این حرکت مقابله کند؛ مثلاً ممکن است B عدد n را بنویسد که در این صورت A باید بازی را در مجموعهٔ $\{۲, ۳, \cdots, n - ۱, n + ۱, \cdots, L\}$، که مقسوم‌علیه‌های احتمالی n از آن حذف شده‌اند، دنبال کند.

از طرف دیگر A می‌تواند آزادانه هریک از عددهایی را بنویسد که از L بزرگتر نیستند و ممکن است که همین عدد صحیح n را در آغاز بازی بنویسد. متأسفانه این اقدام B را با همان انتخابهای منجر به باختی مواجه می‌سازد که ترفند B، وقتی A در ابتدا ۱ را بنویسد، آنها را به A تحمیل می‌کند. بنابراین هر ترفندی برای اینکه B ببرد، موجبات شکستش را در بردارد و از این‌رو پذیرفتنی نیست.

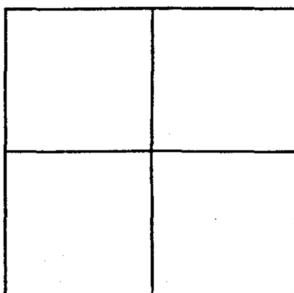
جالب توجه است که آگاهی A از وجود ترفندی برای بردش تسلی‌خاطر مختصری برای اوست، زیرا اگرچه به این ترتیب موفقیت او در یافتن این ترفند تضمین شده است، ولی این امر او را در چگونگی یافتن آن یاری نمی‌دهد.

تجزیهٔ مثلث

۱. دست‌گرمی ساده

اگر از شما بخواهند یک مربع را به چهار مربع کوچکتر تقسیم کنید، با اندکی فکر کردن آن‌را به‌صورت شطرنجی به چهار بخش مساوی تقسیم می‌کنید. اما اگر بخواهند که آن‌را به ۲، ۳ و یا ۵ مربع تقسیم کنید: به‌طور قطع با شکست مواجه می‌شوید زیرا همهٔ این حالتها ناممکن‌اند. با وجود این، ثابت کنید که این موارد، تنها حالتهای استثنایی هستند، به عبارت دیگر،

> ثابت کنید که به‌ازای $n = ۴, ۶, ۷, ۸, \cdots$ می‌توان هر مربع دلخواه را به n مربع کوچکتر که لزوماً هم‌اندازه نیستند تجزیه کرد.



شکل ۶

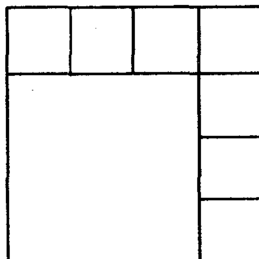
بدیهی است که تقسیم هریک از مربعهای کوچک به چهار بخش مساوی تعداد مربعها را سه واحد افزایش می‌دهد (زیرا چهار مربع به‌دست می‌آید درحالی‌که مربع اولی از بین می‌رود). بنابراین اگر بتوانیم مربع را به n مربع تجزیه کنیم، آن‌وقت می‌توانیم همهٔ تجزیه‌های مربوط به خانوادهٔ نامتناهی $\{n, n+۳, n+۶, n+۹, \cdots\}$ را نیز به‌دست آوریم. در نتیجه اگر بتوانیم دریابیم که چگونه می‌توان

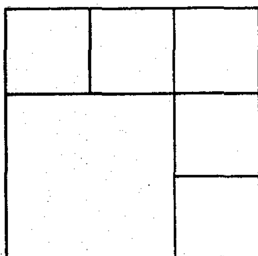
این کار را در سه حالتی که $n = ۴, ۶, ۸$ انجام داد، آنگاه می‌توانیم همهٔ حالتهای مطلوب را به‌دست آوریم:

$$\{۴, ۷, ۱۰, ۱۳, \cdots\}, \{۶, ۹, ۱۲, \cdots\}, \{۸, ۱۱, ۱۴, \cdots\}$$

پیشتر دیدیم که وقتی $n = ۴$ چه باید کرد، پس تنها حالتهای ۶ و ۸ باقی مانده‌اند.

اما همان‌طور که خواهید دید، اینها نیز مسائل ساده‌ای هستند. اگر دو ضلع مجاور از مربع مفروض را به k بخش مساوی تقسیم کنید و روی هریک از این ضلعها نواری متشکل از k مربع مساوی بسازید، حاشیه‌ای با $۲k - ۱$ مربع کوچک به‌دست می‌آورید (سطر و ستون حاصل از مربعها در یک مربع گوشه‌ای مشترک‌اند). با در نظر گرفتن مربع باقی‌مانده از شکل که متمم این مربعهاست، تجزیه‌ای متشکل از $۲k$ مربع به‌دست می‌آید. بنابراین اگر $k = ۳$ و $k = ۴$، به مقصود می‌رسیم.





شکل۷

۲. مسألهٔ مثلث

مسأله‌ای مشابه دربارهٔ تجزیهٔ مثلث به n مثلث کوچکتر را می‌توان به‌آسانی با رسم دسته‌خط دلخواهی متشکل از $n - ۱$ خط که از یکی از رأسهای مثلث می‌گذرند حل کرد. بنابراین برای اینکه مسأله مفهوم جدی‌تری بیابد شرایط بیشتری لازم است. درواقع، آنچه که این‌بار می‌خواهیم این است که مثلث تنها به مثلثهای متساوی‌الساقین تجزیه شود. ممکن است وقتی‌که فقط وجود دو یا سه مثلث در تجزیه موردنظر باشد مسأله قابل حل نباشد، ولی جالب آنجاست که به‌ازای هر n، $n \geqslant ۴$، هر مثلث دلخواه تجزیه‌ای به مثلثهای متساوی‌الساقین دارد.

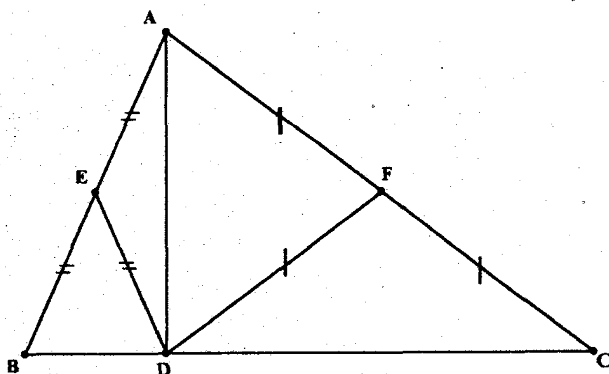
> به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geqslant ۴$، ثابت کنید هر مثلث دلخواه را می‌توان به n مثلث متساوی‌الساقین تجزیه کرد.

این مسأله بخشی از مسألهٔ شمارهٔ ۲۰۰ مجلهٔ کروکس ماتماتیکوروم [۱۹۷۶، ۲۲۰] است و راه‌حل

زیرکانهٔ زیر که از گالی سالواتوره از اُتاوا (با نام مستعار لئو ساوه) است در سال ۱۹۷۷ (۱۳۴ – ۱۳۵) به چاپ رسیده است. احتمالاً از خواندن مسألهٔ ۱۱۱۵ که در سال ۱۹۸۶، صفحهٔ ۲۷ مطرح و پاسخ آن در سال ۱۹۸۷، صفحهٔ ۱۸۹ چاپ شد و تا حد زیادی به این مسأله مربوط می‌شود لذت خواهید برد:

همهٔ عددهای صحیح مانند n را که به‌ازای آنها می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی را به n مثلث متساوی‌الساقین تجزیه کرد تعیین کنید.

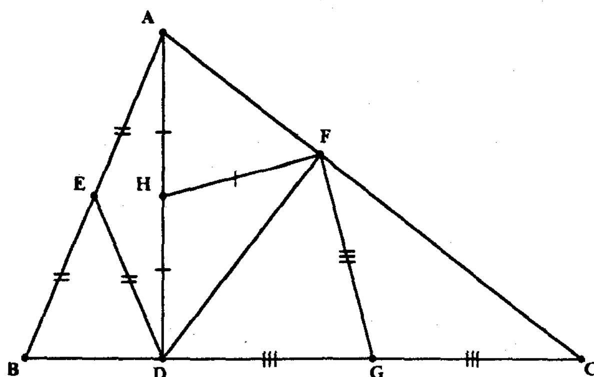
اگرچه ممکن است دو ارتفاع از مثلث بیرون آن قرار گیرند ولی ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع همواره درون مثلث جای می‌گیرد. اگر AD یکی از ارتفاعهای درونی مثلث ABC باشد و E و F وسط دو ضلع دیگر باشند، آنگاه AD، DE و DF مثلث ABC را به چهار مثلث متساوی‌الساقین کوچکتر تقسیم می‌کنند (وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه از سه رأس آن به یک فاصله است، زیرا این نقطه مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث است). بنابراین می‌توان هر مثلث دلخواهی را به چهار مثلث متساوی‌الساقین تجزیه کرد.



شکل۸

همچنین اگر هر مثلث کوچک در تجزیه را به چهار مثلث متساوی‌الساقین تجزیه کنیم، تعداد مثلثها را سه واحد افزایش داده‌ایم. بنابراین مانند مسألهٔ دست‌گرمی مربوط به مربعها، از حل مسألهٔ حاضر در مورد n مثلث، خودبه‌خود جواب مربوط به خانوادهٔ نامتناهی $\{n, n+۳, n+۶, \cdots\}$ را نیز یافته‌ایم. بنابراین کافی است تنها حالتهایی را بررسی کنیم که $n = ۴, ۵, ۶$، و از آنجا که تا به حال حالت ۴ را بررسی کرده‌ایم، بررسی حالتهای ۵ و ۶ باقی مانده است.

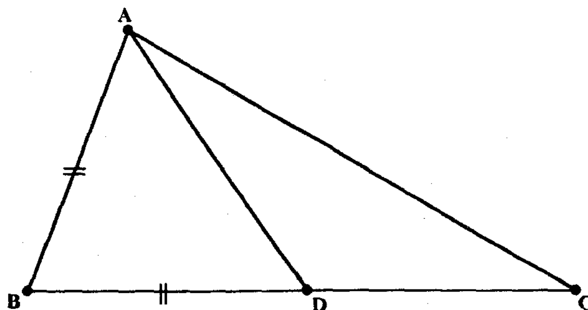
ولی حالتی که $n = ۶$ نتیجه‌ای است از حالتی که $n = ۴$. پس از رسم ارتفاع درونی AD ، مثلث ABC به دو مثلث قائم‌الزاویه افراز می‌شود؛ سپس یکی از این دو مثلث را با اتصال D به وسط وترش به دو مثلث، و مثلث دیگر را به روش قبل به چهار مثلث متساوی‌الساقین تقسیم می‌کنیم.



شکل۹

در حالتی که $n = ۵$، راحت‌تر است حالتی را که مثلث مفروض ABC متساوی‌الاضلاع است جداگانه بررسی کنیم.

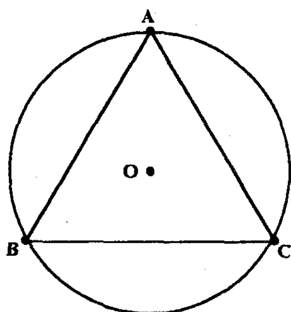
۱) در حالت کلی مثلث ABC متساوی‌الاضلاع نیست و دو ضلع نابرابر دارد. اگر $BC > AB$، آنگاه BD را به‌اندازهٔ BA روی BC جدا می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الساقین ABD به‌دست آید. سپس با تقسیم مثلث باقی‌مانده، ADC، به چهار مثلث متساوی‌الساقین، تجزیهٔ مطلوبی برای مثلث اول به پنج مثلث حاصل می‌شود.

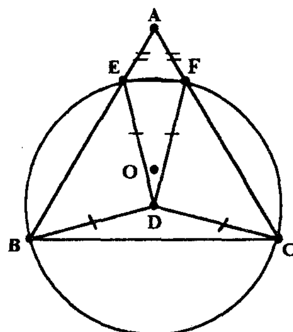


شکل۱۰

۲) بدیهی است که وقتی ABC متساوی‌الاضلاع باشد، رهیافت قبلی به نتیجه نمی‌رسد. در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مرکز دایرهٔ محیطی، O، مرکز ارتفاعی (به عبارت دیگر نقطهٔ برخورد ارتفاعها)، مرکز دایرهٔ محاطی و نیز مرکزثقل مثلث همه یک نقطه‌اند و درواقع می‌توانیم این نقطه را مرکز مثلث

بنامیم. با وجود این اگر AO را کمی امتداد دهیم تا به ضلع BC نزدیکتر شود و انتهای آن‌را D بنامیم، آنگاه دایرهٔ به مرکز D که از B و C می‌گذرد، دیگر از رأس A نمی‌گذرد ولی AB و AC را در نقاط E و F قطع می‌کند. از تقارن شکل به‌وضوح نتیجه می‌شود که AE و AF برابرند، پس $\triangle AEF$ متساوی‌الساقین (و در حقیقت متساوی‌الاضلاع) است. بنابراین EF، DB، DC، DE و DF تجزیهٔ مطلوب $\triangle ABC$ را به پنج مثلث متساوی‌الساقین به‌دست می‌دهند.





شکل۱۱

آزمون ریاضیات دعوتی امریکا، ۱۹۸۷

اینک به سه مسأله از آزمون ریاضیات دعوتی امریکا در سال ۱۹۸۷ می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱

با کمی کوشش معلوم می‌شود که هر عدد طبیعی و فرد مانند $۲k + ۱$ را می‌توان به‌صورت مجموع رشته‌ای از اعداد طبیعی متوالی نوشت. دست‌کم همواره می‌توان نوشت $k + (k + ۱) = ۲k + ۱$. ولی برخی از اعداد فرد برابر با مجموع چندین رشته از این قبیل‌اند. برای مثال

$$۲۱ = ۱۰ + ۱۱ = ۶ + ۷ + ۸ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶$$

در این مسأله از ما خواسته‌اند که k، طول طولانیترین رشته از اعداد صحیحی را که مجموعشان برابر با $۳^{۱۱}$ است به‌دست آوریم.

راه‌حل

اگر طولانیترین رشته از k عدد طبیعی متوالی از این نوع با عدد صحیح a آغاز شود، آنگاه

$$a + (a + ۱) + \cdots + (a + k - ۱) = ۳^{۱۱}$$

$$\frac{k}{۲}(۲a + k - ۱) = ۳^{۱۱}$$

$$k(۲a + k - ۱) = ۲ \times ۳^{۱۱}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که k باید ۲×۳^{۱۱} را بشمارد. بنابراین k باید یکی از ۲۴ عدد زیر باشد

$$۱, ۳, ۳^۲, \cdots, ۳^{۱۱}, ۲, ۲ \times ۳, ۲ \times ۳^۲, \cdots, ۲ \times ۳^{۱۱}$$

بدون تردید عددی که رشتهٔ موردنظرمان با آن آغاز می‌شود دست‌کم برابر با ۱ است، هر چند که ذکر این مطلب چندان مفید به‌نظر نمی‌رسد. بنابراین مجموع این رشته دست‌کم برابر است با

$$۱ + ۲ + \cdots + k = \frac{۱}{۲}k(k + ۱)$$

بنابراین نابرابری $\frac{۱}{۲}k(k+۱) \leqslant ۳^{۱۱}$ را به‌دست آورده‌ایم، اگرچه معلوم نیست که این نابرابری چه فایده‌ای دارد. از اینجا نتیجه می‌شود

$$k(k+۱) = k^۲ + k \leqslant ۲ \times ۳^{۱۱} = ۳۵۴۲۹۴$$

از این مطلب دست‌کم نتیجه می‌گیریم که k باید از ریشهٔ دوم ۲×۳^{۱۱} کمتر باشد:

$$k < \sqrt{۳۵۴۲۹۴} = ۵۹۵/۲۲۶\cdots$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$k < ۵۹۶$$

به‌نظر می‌رسد که این نتیجه فایده‌ای نیز در بر دارد، زیرا به این ترتیب دقیقاً نصف ۲۴ حالت ممکن حذف می‌شود و تنها حالتهای زیر باقی می‌مانند

$$k \in \{۱, ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳, ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ۱۶۲, ۴۸۶\}$$

از آنجا که به‌نظر نمی‌رسد بتوانیم شرایط محدود کنندهٔ دیگری به‌دست آوریم، پس این امکانات را به امید اینکه یکی از بزرگترین آنها قابل استفاده باشد بررسی می‌کنیم.

در همهٔ حالتها

$$k(۲a + k - ۱) = ۲ \times ۳^{۱۱}$$

و بنابراین اگر فرض کنیم $k = ۴۸۶ = ۲ \times ۳^۵$ به‌دست می‌آوریم

$$۲a + ۴۸۵ = \frac{۲ \times ۳^{۱۱}}{۲ \times ۳^۵} = ۳^۶ = ۷۲۹$$

پس $۲a = ۲۴۴$ و $a = ۱۲۲$، یعنی a عددی طبیعی شد. در نخستین کوشش دریافتیم که اگر $k = ۴۸۶$، k قابل استفاده است و روشن است که این مقدار بزرگترین مقدار قابل‌قبول k است. سری نظیر این مقدار چنین است

$$\begin{aligned} ۱۲۲ + ۱۲۳ + \cdots + ۶۰۷ &= \frac{۱}{۲} \times ۴۸۶(۲۴۴ + ۴۸۵) \\ &= \frac{۱}{۲}(۲ \times ۳^۵)(۷۲۹) = ۳^۵ \times ۳^۶ = ۳^{۱۱} \end{aligned}$$

مسألهٔ ۲

اینک به مسأله‌ای می‌پردازیم که به‌نظر من برجسته‌ترین مسألهٔ این آزمون است.

این مسأله مربوط به یکی از شیوه‌های قدیمی مرتب کردن مجموعه‌ای از اعداد به‌ترتیب صعودی به‌نام مرتب کردن سَررفتنی[1] است. در ترتیب دلخواهی از اعداد ممکن است «پس و پیشهای» زیادی وجود داشته باشد؛ به عبارت دیگر ممکن است عددی بزرگتر پیش از عددی کوچکتر قرار گرفته باشد.

1. bubble sort

الگوریتم موردنظر ما شیوه‌ای مقدماتی برای جستجوی پس و پیشها و جابه‌جا کردن یکی یکی آنهاست تا وقتی‌که همهٔ آنها جابه‌جا شوند.

اگر کار را با ترتیب مفروضی مانند $r_۱$، $r_۲$، $\cdots$ و r_n آغاز کنیم، با مقایسهٔ اعداد واقع در دو مکان نخست، $(r_۱, r_۲)$، و سپس جفتی که در مکانهای ۲ و ۳ قرار دارند و به دنبال آن جفتی که در مکانهای ۳ و ۴ واقع‌اند و الی آخر، پس و پیشها را می‌یابیم. هر بار که پس و پیشی می‌یابیم، فقط جای این دو عدد را عوض می‌کنیم و سپس به سراغ جفت واقع در مکان بعدی می‌رویم. روشن است که این «سَررفتن» هیچ عددی را جلوتر از عددی بزرگتر از آن نمی‌برد، بلکه آن‌را آنقدر با خود می‌برد تا اینکه عدد بزرگتری جایگزین آن شود. بنابراین در اولین سَررفتن بزرگترین عدد انتخاب و به انتهای طرف راست برده می‌شود. در سَررفتن دوم بزرگترین عدد بعدی به دومین مکان از آخر (در کنار بزرگترین عدد در انتها) برده می‌شود و به همین ترتیب کار ادامه می‌یابد. البته ضمن اینکه عددهای بزرگ در انتها جمع می‌شوند بسیاری از پس و پیشها جابه‌جا می‌شوند.

برای روشن شدن ایدهٔ اساسی این روش، توجه کنید که اولین سَررفتن در مجموعهٔ $\{۱, ۹, ۸, ۷\}$ شامل مراحل زیر است

$$\underline{۱, ۹}, ۸, ۷ \rightarrow ۱, \underline{۹, ۸}, ۷ \rightarrow ۱, ۸, \underline{۹, ۷} \rightarrow ۱, ۸, ۷, ۹$$

و سَررفتن دوم کار را تمام می‌کند:

$$\underline{۱, ۸}, ۷, ۹ \rightarrow ۱, \underline{۸, ۷}, ۹ \rightarrow ۱, ۷, \underline{۸, ۹} \rightarrow ۱, ۷, ۸, ۹$$

اینک مسأله را مطرح می‌کنیم:

> فرض کنید $r_۱$، $r_۲$، $\cdots$ و $r_{۴۰}$ ترتیبی تصادفی از ۴۰ عدد باشد. احتمال اینکه پس از سَررفتن اول $r_{۲۰}$ به مکان ۳۰اٌم منتقل شود چقدر است؟

راه‌حل

همان‌طور که گفتیم، در هر سَررفتن عددی را انتخاب و از طریق جابه‌جا کردن پس و پیشها آن‌را به جلو منتقل می‌کنیم تا اینکه به عدد بزرگتری برخورد کنیم. در هر مرحله عددی را که «فعلاً در مکان i واقع است» با عددی که «از اول در مکان $i+۱$ واقع است» (یعنی r_i و $r_{i+۱}$ فعلی) مقایسه می‌کنیم، و در نتیجه r_i فعلی همواره بزرگترین عددی است که تا این مکان به آن برخورده‌ایم. پس در همهٔ حالتها

$$\text{فعلی}r_i = \max\{r_۱, r_۲, \cdots, r_i\}$$

عدد r_i فعلی «بزرگترین عدد تا آن موقع» و حاکم است تا وقتی‌که در مقایسه با عدد بزرگتری مغلوب شود. در این هنگام «r_i فعلی» آخرین ساکن مکان iاٌم یا به‌عبارت دیگر «آخرین r_i» می‌شود، اگرچه این عدد هنوز این وجه تمایز را دارد که در i مکان نخست بزرگترین است. بدیهی است که در این

صورت r_{i+1}، عدد بزرگتر، در $i+۱$ مکان نخست بزرگترین است. در نتیجه اگر بخواهیم $r_{۲۰}$ به جلو برود و در مکان «نهایی $r_{۳۰}$» بایستد، $r_{۲۰}$ باید در ۳۰ مکان نخست بزرگترین و $r_{۳۱}$ باید در ۳۱ مکان نخست بزرگترین باشد. مسألهٔ ما تعیین احتمال روی دادن این دو ویژگی در ترتیبی تصادفی از ۴۰ عدد مفروض است.

خوشبختانه این مسأله حقیقتاً ساده است. از آنجا که اعداد بر یکدیگر ارجحیت ندارند، بزرگترین عدد در بین i عدد نخست در مکانی خاص به همان تعدادی ظاهر خواهد شد که در بقیهٔ i مکان نخست می‌تواند ظاهر شود. بنابراین احتمال اینکه $r_{۲۰}$ بزرگترین عدد در ۳۰ مکان نخست باشد برابر با ۱/۳۰ و احتمال اینکه $r_{۳۱}$ بزرگترین عدد در ۳۱ مکان نخست باشد برابر با ۱/۳۱ است. چون این احتمالات مستقل‌اند، احتمال وقوع نتیجهٔ مطلوب برابر است با

$$\frac{۱}{۳۰} \times \frac{۱}{۳۱} = \frac{۱}{۹۳۰}$$

مسألهٔ ۳

در مسألهٔ سوم فقط از ما خواسته‌اند که مقدار زیر را حساب کنیم

$$N = \frac{(۱۰^۴ + ۳۲۴)(۲۲^۴ + ۳۲۴)(۳۴^۴ + ۳۲۴)(۴۶^۴ + ۳۲۴)(۵۸^۴ + ۳۲۴)}{(۴^۴ + ۳۲۴)(۱۶^۴ + ۳۲۴)(۲۸^۴ + ۳۲۴)(۴۰^۴ + ۳۲۴)(۵۲^۴ + ۳۲۴)}$$

راه‌حل

بی‌تردید راهی برای تجزیهٔ این عبارتها وجود دارد. چون $۱۸^۲ = ۳۲۴$، به یاد عبارتهای تجزیه‌ناپذیری به‌صورت $a^۲ + b^۲$ و $a^۴ + b^۴$ می‌افتیم. با وجود این در وضعیت فعلی هر عامل به‌صورت $a^۴ + ۱۸^۲$ است و دست‌کم باید بکوشیم این را تجزیه کنیم. اگر مربعی کامل تشکیل دهیم به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a^۴ + ۱۸ &= (a^۲ + ۱۸)^۲ - ۳۶a^۲ \\ &= (a^۲ + ۱۸ + ۶a)(a^۲ + ۱۸ - ۶a) \end{aligned}$$

و به این ترتیب عدد مفروض، N، را که می‌توانیم آن‌را به‌صورت

$$N = \prod_{k=۰}^{۴} \frac{(۱۰ + ۱۲k)^۴ + ۱۸^۲}{(۴ + ۱۲k)^۴ + ۱۸^۲}$$

بنویسیم، به‌صورت زیر خواهد بود

$$\prod_{k=۰}^{۴} \frac{[(۱۰ + ۱۲k)^۲ + ۱۸ + ۶(۱۰ + ۱۲k)]\ [(۱۰ + ۱۲k)^۲ + ۱۸ - ۶(۱۰ + ۱۲k)]}{[(۴ + ۱۲k)^۲ + ۱۸ + ۶(۴ + ۱۲k)]\ [(۴ + ۱۲k)^۲ + ۱۸ - ۶(۴ + ۱۲k)]}$$

$$= \prod_{k=۰}^{۴} \frac{(۱۴۴k^۲ + ۳۱۲k + ۱۷۸)(۱۴۴k^۲ + ۱۶۸k + ۵۸)}{(۱۴۴k^۲ + ۱۶۸k + ۵۸)(۱۴۴k^۲ + ۲۴k + ۱۰)}$$

با حذف عاملهای مساوی در صورت و مخرج به‌دست می‌آوریم

$$N = \prod_{k=۰}^{۴} \frac{۱۴۴k^۲ + ۳۱۲k + ۱۷۸}{۱۴۴k^۲ + ۲۴k + ۱۰}$$

این عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$N = \prod_{k=۰}^{۴} \frac{n_k}{d_k} = \frac{n_۰ n_۱ n_۲ n_۳ n_۴}{d_۰ d_۱ d_۲ d_۳ d_۴}$$

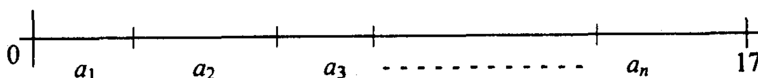
براساس این نمادها نتیجه می‌گیریم $d_{k+۱} = n_k$، زیرا

$$d_{k+۱} = ۱۴۴(k+۱)^۲ + ۲۴(k+۱) + ۱۰$$
$$= ۱۴۴k^۲ + ۳۱۲k + ۱۷۸ = n_k$$

و بنابراین N برابر است با

$$\frac{n_۴}{d_۰} = \frac{۱۴۴(۴)^۲ + ۳۱۲(۴) + ۱۷۸}{۱۰} = \frac{۳۷۳۰}{۱۰} = ۳۷۳$$

مسأله‌ای از آزمون ریاضیات دعوتی امریکا، ۱۹۹۱



بدیهی است که به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، $n > ۱$، می‌توانیم بازهٔ $(۰, ۱۷)$ را به بی‌نهایت طریق مختلف به n بخش ناتهی مثلاً به‌طولهای $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و a_n تقسیم کنیم (درواقع با هر انتخابی از $n - ۱$ نقطهٔ متمایز درون این بازه این کار انجام می‌شود). اینک مجموع

$$S_n(P) = \sum_{k=۱}^{n} \sqrt{(۲k-۱)^۲ + a_k^۲}$$
$$= \sqrt{۱^۲ + a_۱^۲} + \sqrt{۳^۲ + a_۲^۲} + \cdots + \sqrt{(۲n-۱)^۲ + a_n^۲}$$

تابعی از افرازهایی مانند $P = (a_۱, a_۲, \cdots, a_n)$ است که با تغییر P روی همهٔ افرازهای ممکن بی‌نهایت مقدار می‌گیرد. فرض کنید S_n مقدار مینیمم این تابع باشد:

$$S_n = \min_P S_n(P) = \min_P \sum_{k=۱}^{n} \sqrt{(۲k-۱)^۲ + a_k^۲}$$

جالب است که می‌توانیم نتیجه بگیریم دقیقاً یکی از مقادیر

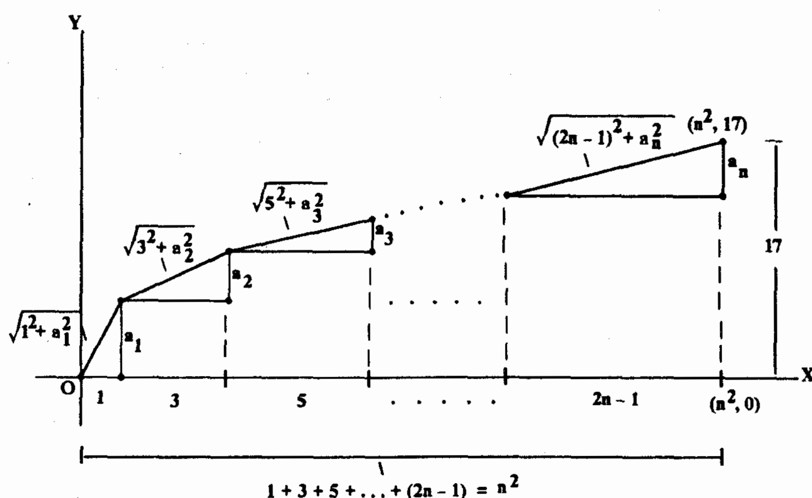
$$S_۲, \ S_۳, \ S_۴, \ \cdots, \ S_n, \ \cdots$$

عددی صحیح است. این مقدار کدام است؟

راه‌حل

با توجه به اینکه $\sqrt{(۲k-۱)^۲ + a_k^۲}$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌طول ضلعهای $(۲k - ۱)$ و a_k است، که به این ترتیب $S_n(P)$ برابر می‌شود با مجموع n وتر از این نوع، می‌توانیم هندسی فکر کنیم و با این طرز تفکر مسأله تقریباً حل شده است. اگر در صفحهٔ مختصات این وترها را به‌طور متوالی به

یکدیگر وصل کنیم تا به این ترتیب مبدأ به نقطهٔ $(n^۲, ۱۷)$ مرتبط شود، برای حل کردن مسأله گامی کوچک و معقول برداشته‌ایم.



شکل۱۲

در این صورت بدیهی است که

$$S_n = \min S_n(P)$$

$$= \text{طول مسیر مستقیم بین } (۰,۰) \text{ و } (n^۲, ۱۷)$$

$$= \sqrt{n^۴ + ۱۷^۲}$$

برای اینکه S_n عددی صحیح باشد باید

$$n^۴ + ۱۷^۲ = t^۲$$

که به این ترتیب $(n^۲, ۱۷, t)$ سه‌تایی فیثاغورسی است. ولی تنها یک سه‌تایی فیثاغورسی وجود دارد که طول یکی از ساقهای مثلث متناظرش برابر با ۱۷ است. نتیجه‌ای نسبتاً مشهور که تحقیق آن بسیار ساده است این است که اگر m عددی فرد (مانند ۱۷) باشد، آنگاه

$$(m, \tfrac{۱}{۲}(m^۲ - ۱), \tfrac{۱}{۲}(m^۲ + ۱))$$

سه‌تایی فیثاغورسی است. بنابراین (۱۷, ۱۴۴, ۱۴۵) سه‌تایی مطلوب است و در نتیجه

$$n^۲ = ۱۴۴, \ n = ۱۲$$

بنابراین $S_{۱۲} = ۱۴۵$، $S_{۱۲}$، تنها عدد صحیح بین S_nهاست.

نُه مسألهٔ استفاده نشده از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۷

۱. مسأله‌ای از امریکا

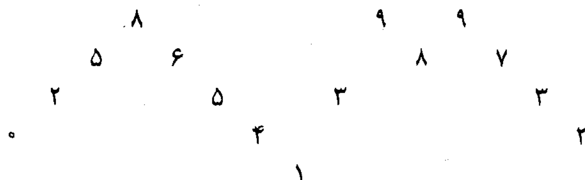
(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۷۹؛ راه‌حل مشابهی در ۱۹۸۹، ۱۳۵ آمده است.)

عدد زیر را در نظر بگیرید

$$N = ۰۲۵۸۶۵۴۱۳۹۸۹۷۳۲$$

اگر این عدد را به‌دقت از طرف چپ بررسی کنیم، معلوم می‌شود که رقمهایش شامل شش رشتهٔ صعودی و نزولی‌اند که به‌دنبال هم آمده‌اند:

۰۲۵۸, ۸۶۵۴۱, ۱۳۹, ۹۸, ۸۹, ۹۷۳۲



چون نمی‌خواهیم رشته‌های طولانی مثلاً دو یا بیش از دو رشتهٔ مجاور هم را بررسی کنیم، فقط رشته‌های ماکسیمال یعنی رشته‌هایی را که تا تغییر بعدی امتداد دارند در نظر می‌گیریم. این امر موجب می‌شود که هرگونه ابهامی دربارهٔ رشتهٔ موردنظر برطرف شود. از این پس چنین رشته‌های ماکسیمالی را «مسیر» می‌نامیم.

عددهایی مانند ۷۷۷۶۵۵۹۹۱۱ که رقمهای تکراری دارند، پیچیدگیهای ناخواسته‌ای وارد مسأله می‌کنند و به همین دلیل توجه خود را به آن اعداد طبیعی معطوف می‌کنیم که در آنها همواره رقمهای مجاور متمایزند. سرانجام، همان‌طورکه در مثال نخست دیدیم، اینکه رقم اول برابر با صفر باشد مجاز است.

پرسش این است که «میانگین تعداد مسیرها در عددهای n رقمی از این نوع چقدر است؟»

راه‌حل

راه‌حل زیبای زیر از همکارم یان گولدِن (در دانشگاه واترلو) است.

بدیهی است که تعداد عددهای n رقمی از این نوع برابر است با $N = ۱۰ \times ۹^{n-۱}$. دلیل آن است که برای رقم اول ۱۰ انتخاب وجود دارد ولی برای هریک از رقمهای بعدی تنها ۹ انتخاب وجود دارد، زیرا تکرارهای متوالی مجاز نیستند. بنابراین میانگین مطلوب برابر است با

$$A = \frac{T\text{، تعداد کل مسیرها در این } N \text{ عدد صحیح}}{N} = \frac{T}{N}$$

اینک مسأله یافتن اطلاعاتی دربارهٔ T است.

از آنجا که به‌طورکلی ممکن است مسیر از هر جایی در طول عددی صحیح آغاز شود، در نتیجه راهی ساده برای محاسبهٔ T این است که مجموع زیر را حساب کنیم

(تعداد مسیرهایی که از رقم اول آغاز می‌شوند، $r_۱$)
+ (تعداد مسیرهایی که از رقم دوم آغاز می‌شوند، $r_۲$)
+ (تعداد مسیرهایی که از رقم سوم آغاز می‌شوند، $r_۳$)
....
+ (تعداد مسیرهایی که از رقم nام آغاز می‌شوند، r_n)

یعنی

$$T = r_۱ + r_۲ + \cdots + r_n$$

با این نامگذاری

$$A = \frac{r_۱ + r_۲ + \cdots + r_n}{N} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{r_i}{N}$$

بدیهی است که r_i/N احتمال این است که عدد صحیحی که به‌طور تصادفی از میان N عدد موردنظر ما انتخاب شده است مسیری داشته باشد که از محل iام آغاز شده است. اگر این احتمال را با p_i نشان دهیم، میانگین مطلوب چنین خواهد بود

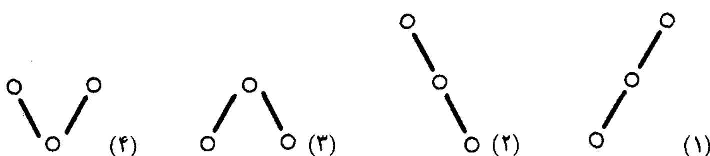
$$A = \sum_{i=۱}^{n} p_i$$

بنابراین توجه خود را به محاسبهٔ p_iها معطوف می‌کنیم.

بدیهی است که $p_۱ = ۱$، زیرا رقم پیشرو همواره در ابتدای مسیری واقع است، و $p_n = ۰$، زیرا رقم آخر هیچ‌گاه در ابتدای مسیری قرار ندارد. مشکل در محلهایی است که درونی‌اند، ولی می‌توان این p_iها را از رهیافت ابتکاری زیر تعیین کرد.

برای بررسی وضعیت در محل درونی دلخواهی مانند محل iام، محلی را که قبل از آن و محلی را که بعد از آن واقع است در نظر بگیرید. نمودارهای زیر چهار ترتیب ممکنی را نشان می‌دهند که

ممکن است رقمهای واقع در سه محل مجاور نسبت به‌هم قرار گیرند.



بنابراین رقم میانی که در محل iام قرار دارد تنها در حالتهای (۳) و (۴) ممکن است ابتدای یکی از مسیرها باشد و

$$p_i = \text{(۳) احتمال} + \text{(۴) احتمال}$$

محاسبهٔ مستقیم این مقدار دشوار است، ولی با در نظر گرفتن احتمال متمم می‌توان این کار را به‌سادگی انجام داد:

$$p_i = ۱ - [\text{(۱) احتمال} + \text{(۲) احتمال}]$$
$$= ۱ - ۲[\text{(۱) احتمال}]$$

زیرا بدیهی است که به‌دلیل تقارن حالتهای (۱) و (۲) یک احتمال دارند.

از آنجا که سه رقم مربوط به حالت (۱) یکنوا صعودی‌اند، پس این سه رقم باید یکی از $\binom{۱۰}{۳}$ مجموعهٔ سه‌تایی باشند که اعضای متمایز دارند (تنها یک طریق برای مرتب کردن هریک از این مجموعه‌ها به‌شکل صعودی وجود دارد). تعداد راههای پر کردن سه مکان متوالی برابر با ۱۰×۹^۲ است (۱۰ راه برای پر کردن مکان اول و ۹ راه برای هریک از دو مکان دیگر وجود دارد). بنابراین

$$p_i = ۱ - ۲ \times \frac{\binom{۱۰}{۳}}{۱۰ \times ۹^۲} = ۱ - \frac{۲ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱۰ \times ۹ \times ۹} = ۱ - \frac{۸}{۲۷} = \frac{۱۹}{۲۷}$$

این نتیجه از نظر من غیرمنتظره است زیرا تصور نمی‌کردم که p_i به‌ازای هر $n - ۲$ مکان درونی و به‌ازای هر n مقدار ثابتی باشد. در هر صورت میانگین مطلوب برابر است با

$$A = \sum_{i=۱}^{n} p_i = ۱ + (n - ۲)p_i + ۰$$
$$= ۱ + \frac{۱۹}{۲۷}(n - ۲)$$

ملاحظات

از بحث بالا نتیجه می‌شود که در هر عدد صحیح ۲۹ رقمی به‌طور متوسط ۲۰ مسیر وجود دارد. این مقدار از نظر شخصی مثل من که در آمار آموزش ندیده است بسیار زیاد به‌نظر می‌رسد، زیرا طول میانگین حاصل از آن بسیار کوتاه و برابر با $\frac{۲۹}{۲۰} = ۱/۴۵$ رقم در هر مسیر است. از آنجا که مسیری وجود ندارد که شامل ۱/۴۵ رقم باشد و نیز همهٔ مسیرها از مسیر میانگین طولانیتر نیستند، نتیجه

می‌شود که برخی از مسیرهایی که طولشان کوتاهتر از طول میانگین است، باید تنها یک رقم داشته باشند، که چنین چیزی ناممکن است. البته در محاسبهٔ شتاب‌زدهٔ بالا این حقیقت را نادیده گرفته‌ایم که ۲۰ مسیر موردنظر در ۱۹ موضع به یکدیگر متصل‌اند و هریک از این موضعها در محاسبهٔ طول مسیرها دو بار شمرده می‌شود، زیرا هریک از آنها یک‌بار انتهای مسیر و بار دیگر ابتدای مسیر بعدی است. بنابراین میانگین واقعی طول مسیرها برابر است با

$$\frac{۲۹ + ۱۹}{۲۰} = \frac{۴۸}{۲۰} = ۲/۴$$

که مطمئناً عددی قابل‌قبول است ولی بازهم از نظر من چندان بزرگ نیست.

با بررسی عددهای ۵۶ رقمی درمی‌یابیم که مقدار میانگین تعداد مسیرها برابر است با

$$۱ + \frac{۱۹}{۲۷}(۵۴) = ۳۹$$

و میانگین طول حاصل از آن برابر می‌شود با

$$\frac{۵۶ + ۳۸}{۳۹} = \frac{۹۴}{۳۹} = ۲/۴۱۰۲۵۶\cdots$$

پیشرفت نه‌چندان ارزشمندی که حاصل شد، ما را قانع می‌کند تا مستقیماً به سراغ حالت کلی برویم. به همان روش قبل معلوم می‌شود که میانگین طول مسیرها در عددهای n رقمی برابر است با

$$\frac{n + \frac{۱۹}{۲۷}(n - ۲)}{۱ + \frac{۱۹}{۲۷}(n - ۲)} = \frac{۴۸n - ۳۸}{۱۹n - ۱۱} = \frac{۴۸ - \frac{۳۸}{n}}{۱۹ - \frac{۱۱}{n}}$$

که به‌تدریج به حد کوچک و ناامیدکنندهٔ $\frac{۴۸}{۱۹} = ۲/۵۲۶۳\cdots$ میل می‌کند.

ممکن است مشکل ناشی از این باشد که معمولاً با در نظرگرفتن شکلهای زیگراگ این حقیقت فراموش می‌شود که ممکن نیست طول مسیرها بیشتر از ۱۰ رقم باشد. بدون شک این مطلب در پایین نگه‌داشتن میانگین طول مسیرها نقش مهمی ایفا می‌کند. البته می‌توانیم با در نظرگرفتن مبنای عددی دیگری کران بالاتری برای میانگین طول مسیرها به‌دست آوریم.

برای مثال در مبنای ۱۰۱،

$$p_i = ۱ - ۲ \times \frac{\binom{۱۰۱}{۳}}{۱۰۱ \times ۱۰۰^۲} = ۱ - \frac{۲ \times ۱۰۱ \times ۱۰۰ \times ۹۹}{۳ \times ۲ \times ۱۰۱ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰}$$
$$= ۱ - \frac{۹۹}{۳ \times ۱۰۰} = ۱ - \frac{۳۳}{۱۰۰} = \frac{۶۷}{۱۰۰}$$

و میانگین تعداد مسیرها در عددهای ۱۰۰۲ رقمی برابر است با

$$۱ + \frac{۶۷}{۱۰۰}(۱۰۰۰) = ۶۷۱$$

بنابراین میانگین طول مسیرها در چنین عددهایی برابر می‌شود با

$$\frac{۱۰۰۲ + ۶۷۰}{۶۷۱} = \frac{۱۶۷۲}{۶۷۱} = ۲/۴۹۱۸\cdots$$

این تنها گویای آن است که وضع شهود من در چنین مواردی بدتر از آن است که تصور می‌کردم. اینک بیایید به عددهای طولانیتری در مبناهای بزرگتری مانند b توجه کنیم، اگرچه ممکن است این کار موجب شود اندک اعتماد به‌نفسی که برایم باقی مانده است از بین برود. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} p_i &= ۱ - ۲ \times \frac{\binom{b}{۳}}{b(b-۱)^۲} = ۱ - \frac{۲b(b-۱)(b-۲)}{۳ \times ۲ \times b(b-۱)(b-۱)} \\ &= ۱ - \frac{b-۲}{۳(b-۱)} = ۱ - \frac{۱}{۳}\left(۱ - \frac{۱}{b-۱}\right) \\ &= \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳(b-۱)} \end{aligned}$$

با بزرگ شدن b، مقدار آخرین عبارت رفته‌رفته کاهش می‌یابد و به $\frac{۲}{۳}$ میل می‌کند. بنابراین به‌ازای bهای بزرگ، میانگین تعداد مسیرها تقریباً برابر با $۱ + \frac{۲}{۳}(n-۲)$ می‌شود که از آن نتیجه می‌گیریم میانگین طول مسیرها برابر است با

$$\frac{n + \frac{۲}{۳}(n-۲)}{۱ + \frac{۲}{۳}(n-۲)} = \frac{۵n - ۴}{۲n - ۱} = \frac{۵ - \frac{۴}{n}}{۲ - \frac{۱}{n}}$$

که هیچ‌وقت از عدد جادویی $۲\frac{۱}{۲}$ زیاد دور نمی‌شود.

۲. مسأله‌ای از بریتانیا

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۵۴؛ راه‌حل مشابهی در ۱۹۸۹، ۹ آمده است.)

موضوع این مسألهٔ بسیار زیبا به خانوادهٔ خاصی از دنباله‌های نامتناهی از اعداد حقیقی مثبت مانند

$$\{x_i\} = \{x_۱, x_۲, x_۳, \cdots\}$$

مربوط می‌شود. به‌ازای دنباله‌های این خانواده، با مقادیر کسرهای

$$f_n = \frac{\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}}, \quad n = ۱, ۲, \cdots$$

سروکار داریم. به‌ازای دنباله‌ای ممکن است f_n بسیار بزرگ شود. برای مثال در مورد دنبالهٔ $\{۱, ۱, ۱, \cdots\}$،

$$f_n = \frac{۱ + ۱ + \cdots + ۱}{\sqrt{۱ + ۱ + \cdots + ۱}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

و با بزرگ شدن n، f_n به ∞ میل می‌کند. مثال دیگری از این نوع که به‌روشنی مثال قبل نیست، دنبالهٔ $\{۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, \cdots, n^۲, \cdots\}$ است.

با وجود این اگر بحث خود را به دنباله‌هایی محدود کنیم که در آنها هر جمله همیشه دست‌کم برابر با مجموع جمله‌های قبل از خود است، یعنی

$$x_n \geqslant x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{n-۱}, \quad n = ۲, ۳, ۴, \cdots$$

آنگاه مقدار f_nها دور از دسترس نخواهد بود. در حقیقت صرفنظر از مقدار n یا دنباله‌ای از نوع موردنظر که با آن سروکار داریم، هیچ‌گاه مقدار f_nها از عدد ثابتی چون c بزرگتر نمی‌شود. در این مسأله از ما خواسته شده است که c، کوچکترین کران بالای همهٔ f_nهایی را که از این خانوادهٔ خاص از دنباله‌ها به‌وجود آمده‌اند، تعیین کنیم.

راه‌حل

اگر مقدار c در این مسأله مشخص شده بود، بازهم باید ثابت می‌کردیم که این عدد واقعاً کوچکترین کران بالای f_nهاست. از آنجاکه مقدار c معلوم نیست، پیش از پرداختن به مسألهٔ اصلی، یعنی اثبات ویژگی مشخصهٔ c، مسئولیت مضاعف حدس زدن مقدار c نیز برعهدهٔ ماست. بدیهی است که بررسی هر حدس خاصی این شبهه را به همراه دارد که ممکن است تمام این کار به‌هدر دادن وقت باشد. مطمئناً این وضعیت جذابیت مسأله را بیشتر می‌کند و بی‌تردید ما را وادار می‌سازد که تنها حدسهایی را در نظر بگیریم که تا حد زیادی امیدوارکننده باشند.

شرط داده شده، $x_n \geqslant x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{n-۱}$، مقادیر ممکن x_n را تا حد زیادی کاهش می‌دهد. به‌نظر می‌رسد فاصله‌ای که بین مقدار واقعی x_n و کمترین مقدار ممکن آن، یعنی $x_۱ + \cdots + x_{n-۱}$، وجود دارد، تأثیر مهمی بر مقدار f_n دارد. از این‌رو می‌توانیم بپذیریم دنباله‌هایی که در آنها این فاصله‌ها اکسترمم هستند، نظیر مجموعه‌ای از f_nهای اکسترمم هستند، و این نتیجه راهنمای ما برای تعیین مقدار دقیق c است. بنابراین دنباله‌ای را در نظر می‌گیریم که کاملاً «فشرده» است، به این معنا که پس از $x_۱$، هریک از x_nها تا حد ممکن کوچک است؛ به‌عبارت دیگر، همواره x_n برابر با $x_۱ + \cdots + x_{n-۱}$ است. برای مثال دنبالهٔ زیر را در نظر می‌گیریم

$$\{۱, ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, \cdots, ۲^k, \cdots\}$$

(یادآوری می‌کنیم $۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{k-۱} = ۲^k - ۱$). در مورد این دنباله

$$f_n = \frac{\sqrt{۱} + \sqrt{۱} + \sqrt{۲} + \sqrt{۴} + \sqrt{۸} + \cdots + \sqrt{۲^{n-۲}}}{\sqrt{۱ + ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + \cdots + ۲^{n-۲}}}$$

یعنی

$$f_n = \frac{۱ + ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{۴} + \cdots + \sqrt{۲^{n-۲}}}{\sqrt{۲^{n-۱}}}$$

اگر n فرد باشد، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
f_{۲k+۱} &= \frac{۱ + ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{۴} + \sqrt{۸} + \sqrt{۱۶} + \cdots + \sqrt{۲^{۲k-۲}} + \sqrt{۲^{۲k-۱}}}{\sqrt{۲^{۲k}}} \\
&= \frac{۱ + (۱ + ۲ + ۴ + \cdots + ۲^{k-۱}) + \sqrt{۲}(۱ + ۲ + ۴ + \cdots + ۲^{k-۱})}{۲^k} \\
&= \frac{۱ + (۲^k - ۱) + \sqrt{۲}(۲^k - ۱)}{۲^k} = ۱ + \sqrt{۲}\left(۱ - \frac{۱}{۲^k}\right)
\end{aligned}$$

بنابراین، وقتی‌که $k \to \infty$، $f_{2k+1} \to 1 + \sqrt{2}$.
اگر n زوج باشد، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} f_{2k+2} &= \frac{1 + 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{2^{2k-1}} + \sqrt{2^{2k}}}{\sqrt{2^{2k+1}}} \\ &= \frac{1 + (1 + 2 + \cdots + 2^k) + \sqrt{2}(1 + 2 + \cdots + 2^{k-1})}{2^k\sqrt{2}} \\ &= \frac{1 + (2^{k+1} - 1) + \sqrt{2}(2^k - 1)}{2^k\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

و بازهم وقتی‌که $k \to \infty$، $f_{2k+2} \to 1 + \sqrt{2}$. بنابراین اینکه حدس بزنیم $c = 1 + \sqrt{2}$، که حاصل بررسی دنباله‌ای با مقادیر اکسترمم است، به هیچ‌وجه حساب نشده نیست و ارزش آن‌را دارد که برای اثبات معتبر بودنش کوشش زیادی به‌عمل آوریم. می‌دانیم f_n مقادیری را می‌گیرد که به‌اندازهٔ دلخواه به $1 + \sqrt{2}$ نزدیک‌اند. حال اگر بتوانیم ثابت کنیم که f_n هرگز بزرگتر از $1 + \sqrt{2}$ نمی‌شود نتیجهٔ مطلوب را به‌دست آورده‌ایم.

بدیهی است که

$$f_1 = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}} = 1 \leqslant 1 + \sqrt{2}$$

به‌نظر می‌رسد که استقرا رهیافت مناسبی برای حل این مسأله باشد. بنابراین فرض کنید

$$f_{n-1} = \frac{\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_{n-1}}}{\sqrt{x_1 + \cdots + x_{n-1}}} \leqslant 1 + \sqrt{2} \qquad \text{(الف)}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم

$$f_n = \frac{\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{x_1 + \cdots + x_n}} \leqslant 1 + \sqrt{2}$$

با توجه به (الف)،

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geqslant \left(\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_{n-1}}}{1 + \sqrt{2}}\right)^2$$

از اینجا به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f_n &\leqslant \frac{\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{\left[\dfrac{\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_{n-1}}}{1 + \sqrt{2}}\right]^2 + x_n}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n})}{\sqrt{\left(\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_{n-1}}\right)^2 + (1 + \sqrt{2})^2 x_n}} \end{aligned}$$

بنابراین اگر بتوانیم ثابت کنیم

$$\frac{\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{(\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}})^2+(1+\sqrt{2})^2x_n}}\leqslant 1$$

یعنی ثابت کنیم

$$(\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}})+\sqrt{x_n}\leqslant\sqrt{\left(\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}}\right)^2+(1+\sqrt{2})^2x_n}$$

آنگاه نتیجهٔ مطلوب، $f_n\leqslant 1+\sqrt{2}$، به‌دست می‌آید. با مجذور کردن دو طرف نابرابری بالا معلوم می‌شود که این نابرابری معادل است با

$$\left(\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}}\right)^2+2\sqrt{x_n}\left(\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}}\right)+x_n$$
$$\leqslant\left(\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}}\right)^2+(3+2\sqrt{2})x_n$$

و یا

$$2\sqrt{x_n}\left(\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}}\right)\leqslant(2+2\sqrt{2})x_n$$
$$\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}}\leqslant(1+\sqrt{2})\sqrt{x_n}$$

ولی

$$x_n\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}$$

و بنابراین

$$\sqrt{x_n}\geqslant\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}} \qquad \text{(ب)}$$

اینک با توجه به فرض استقرا، (الف)، به‌دست می‌آوریم

$$\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}}\leqslant(1+\sqrt{2})\sqrt{x_1+\cdots+x_{n-1}}$$

در نتیجه بنابر (ب) نابرابری مطلوب را به‌دست می‌آوریم

$$\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}}\leqslant(1+\sqrt{2})\sqrt{x_n}$$

از آنجا که می‌توانیم تمام مراحل این استدلال را معکوس کنیم، از استقرا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n و در مورد همهٔ دنباله‌ها، f_n از $1+\sqrt{2}$ بزرگتر نیست و چون، با توجه به آنچه در مورد دنبالهٔ $\{1,1,2,4,8,\cdots,2^k,\cdots\}$ ثابت شد، می‌توان f_nها را به‌اندازهٔ دلخواه به $1+\sqrt{2}$ نزدیک کرد، نتیجه می‌گیریم که کوچکترین کران بالای موردنظر، یعنی c، واقعاً برابر با $1+\sqrt{2}$ است.

۳. مسأله‌ای از ایسلند

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۷۸؛ راه‌حل دیگری در ۱۹۸۹، ۱۳۳ آمده است.)

پنج عدد مختلف را یکی‌یکی و به‌تصادف از مجموعهٔ $\{1,2,\cdots,n\}$ انتخاب می‌کنیم و پس از انتخاب

هر عدد آن‌را به مجموعه باز نمی‌گردانیم. ثابت کنید احتمال اینکه بتوان با نخستین سه عدد انتخاب شده، و نیز پنج عدد انتخاب شده، تصاعدی حسابی ساخت بزرگتر از $\frac{۶}{(n-۲)^۳}$ است.

راه‌حل

ابتدا تعداد تصاعدهای حسابی ۵ جمله‌ای را که قدرنسبتشان برابر با عدد طبیعی d است حساب می‌کنیم. اگر جملهٔ اول یکی از این تصاعدها a باشد، جملهٔ پنجم آن، $a+۴d$، نباید بزرگتر از n باشد، یعنی

$$a+۴d \leqslant n\,, \quad a \leqslant n-۴d$$

به بیان دیگر می‌توان جملهٔ اول را یکی از عددهای ۱, ۲، $\cdots$ و $n-۴d$ انتخاب کرد، و در نتیجه تعداد چنین تصاعدهایی برابر با $n-۴d$ است.

اینک مقادیر ممکن d را بررسی می‌کنیم. از شرط $a+۴d<n$ نتیجه می‌شود

$$d \leqslant \frac{n-a}{۴}$$

و چون a باید دست‌کم برابر با ۱ باشد، در هر حالت

$$d \leqslant \frac{n-۱}{۴}$$

چون d عددی صحیح است، نتیجه می‌شود

$$d \leqslant \left[\frac{n-۱}{۴}\right]$$

که در اینجا کروشه جزءِ صحیح را مشخص می‌کند.

بهتر است جانب احتیاط را نگه داریم و ببینیم که آیا بزرگترین مقدار d، یعنی $\left[\frac{n-۱}{۴}\right]$، همواره قابل‌قبول است یا خیر. به‌ازای $a=۱$،

$$۱+۴\left[\frac{n-۱}{۴}\right] \leqslant ۱+۴\times\frac{n-۱}{۴}=n$$

پس معلوم می‌شود که می‌توان d را یکی از عددهای صحیح زیر انتخاب کرد

$$۱, ۲, ۳, \cdots, \left[\frac{n-۱}{۴}\right]$$

بنابراین تعداد کل تصاعدهای حسابی ۵ جمله‌ای مانند $(t_۱, t_۲, t_۳, t_۴, t_۵)$ در مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ برابر است با

$$S = \sum_{d=۱}^{\left[\frac{n-۱}{۴}\right]} (n-۴d)$$
$$= n\left[\frac{n-۱}{۴}\right] - ۴\left(۱+۲+\cdots+\left[\frac{n-۱}{۴}\right]\right)$$

$$= n\left[\frac{n-۱}{۴}\right] - ۲\left[\frac{n-۱}{۴}\right]\left(\left[\frac{n-۱}{۴}\right]+۱\right)$$
$$= \left[\frac{n-۱}{۴}\right]\left(n - ۲\left[\frac{n-۱}{۴}\right] - ۲\right)$$

اینک هنگامی‌که بتوانیم عددهای انتخاب شده را به‌صورت تصاعدی حسابی و ۵ جمله‌ای مانند $(t_۱, t_۲, t_۳, t_۴, t_۵)$ مرتب کنیم، برای اینکه بتوان اولین سه عدد انتخاب شده را نیز به‌صورت تصاعدی حسابی مرتب کرد، این سه عدد باید یکی از چهار مجموعهٔ زیر را تشکیل دهند

$$\{t_۱, t_۲, t_۳\},\quad \{t_۲, t_۳, t_۴\},\quad \{t_۳, t_۴, t_۵\},\quad \{t_۱, t_۳, t_۵\}$$

برای مثال مجموعهٔ $\{t_۱, t_۲, t_۳\}$ را می‌توان به $۶ = ۳!$ روش مختلف (برحسب ترتیب اعضایش) انتخاب کرد و دو عدد آخر یعنی $t_۴$ و $t_۵$، را نیز می‌توان به هر ترتیب دلخواهی انتخاب کرد. بنابراین برای انتخاب مجموعهٔ $\{t_۱, t_۲, t_۳, t_۴, t_۵\}$، به‌طوری‌که اولین سه عدد انتخاب شده به ترتیبی عددهای $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ باشند، $۱۲ = ۲ \times ۶$ روش مختلف وجود دارد. به همین ترتیب در مورد هریک از این چهار حالت؛ و مجموعاً $۴۸ = ۱۲ \times ۴$ ترتیب وجود دارد که از هریک از آنها می‌توانیم S تصاعد انتخاب کنیم به‌طوری‌که سه عدد اول آن‌را بتوان به‌صورت تصاعدی حسابی مرتب کرد. بنابراین از بین $n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$ روش مختلفی که می‌توانیم پنج عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ انتخاب کنیم، $۴۸S$ حالت مطلوب وجود دارد، و در نتیجه احتمال موردنظر برابر است با

$$P = \frac{۴۸S}{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)}$$

آنچه باقی مانده تخمین مقدار S است.

برای به‌دست آوردن $\left[\frac{n-۱}{۴}\right]$، جزءِ کسری $\frac{n-۱}{۴}$ را حذف می‌کنیم، و در نتیجه مقدار این عدد به‌اندازهٔ یکی از عددهای $\frac{۰}{۴}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۲}{۴}$ یا $\frac{۳}{۴}$ کاهش می‌یابد. در نتیجه $\left[\frac{n-۱}{۴}\right]$ با یکی از مقادیر زیر برابر است

$$\frac{n-۱}{۴}, \frac{n-۲}{۴}, \frac{n-۳}{۴}, \frac{n-۴}{۴}$$

مقادیر نظیر S در این حالتها برابرند با

(الف)
$$\frac{n-۱}{۴}\left(n - ۲\left(\frac{n-۱}{۴}\right) - ۲\right) = \frac{n^۲ - n}{۴} - \frac{n^۲ - ۲n + ۱}{۸} - \frac{n-۱}{۲}$$
$$= \frac{n^۲ - ۴n + ۳}{۸}$$

(ب)
$$\frac{n-۲}{۴}\left(n - ۲\left(\frac{n-۲}{۴}\right) - ۲\right) = \frac{n^۲ - ۲n}{۴} - \frac{n^۲ - ۴n + ۴}{۸} - \frac{n-۲}{۲}$$
$$= \frac{n^۲ - ۴n + ۴}{۸}$$

(ج)
$$\frac{n-۳}{۴}\left(n - ۲\left(\frac{n-۳}{۴}\right) - ۲\right) = \frac{n^۲ - ۳n}{۴} - \frac{n^۲ - ۶n + ۹}{۸} - \frac{n-۳}{۲}$$
$$= \frac{n^۲ - ۴n + ۳}{۸}$$

(د)
$$\frac{n-4}{4}\left(n-2\left(\frac{n-4}{4}\right)-2\right)=\frac{n^2-4n}{4}-\frac{n^2-8n+16}{8}-\frac{n-4}{2}=\frac{n^2-4n}{8}$$

کوچکترین این عددها برابر است با

$$\frac{n^2-4n}{8}=\frac{n(n-4)}{8}$$

بنابراین در هر حالت

$$S\geqslant\frac{n(n-4)}{8}$$

و در نتیجه

$$P\geqslant\frac{48\times\frac{n(n-4)}{8}}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}=\frac{6}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

حال می‌توان نوشت

$$(n-1)(n-3)=n^2-4n+3<n^2-4n+4=(n-2)^2$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{(n-1)(n-3)}>\frac{1}{(n-2)^2}$$

و بنابراین

$$P\geqslant\frac{6}{(n-1)(n-2)(n-3)}>\frac{6}{(n-2)^3}$$

که همان نتیجهٔ مطلوب است.

۴. مسأله‌ای از روسیه

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۰۹؛ راه‌حل دیگری در ۱۹۸۹، ۱۶۸ آمده است.)

فرض کنید $\tau(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی n باشد. در این صورت

$$\tau(1)=1,\ \ \tau(2),\ \ \tau(3)=2,\ \ \tau(4)=3,\cdots$$

موضوع این مسأله مربوط به خانوادهٔ دنباله‌هایی مانند دنبالهٔ زیر است

$$n,\ \tau(n),\ \tau(\tau(n)),\ \tau(\tau(\tau(n))),\cdots,$$

که در آن هر جمله‌ای که بعد از جملهٔ اول آمده با تعداد مقسوم‌علیه‌های جملهٔ قبل از آن برابر است. مثالی از این دنباله‌ها این دنباله است

$$۵۴۰, ۲۴, ۸, ۴, \cdots$$

بدیهی است که چنین دنباله‌هایی را می‌توان از روی جملهٔ اولشان که عددهایی طبیعی و بزرگتر از ۱ هستند کاملاً مشخص کرد.

در اینجا مسألهٔ موردنظر شناسایی دنباله‌هایی از این خانواده است که شامل هیچ مربع کاملی نیستند.

راه‌حل

اگر تجزیهٔ n به عددهای اول به‌صورت

$$n = p_۱^{a_۱} p_۲^{a_۲} \cdots p_k^{a_k}$$

باشد به‌آسانی معلوم می‌شود که

$$\tau(n) = (a_۱ + ۱)(a_۲ + ۱) \cdots (a_k + ۱)$$

زیرا هر عددی به‌صورت

$$d = p_۱^{b_۱} p_۲^{b_۲} \cdots p_k^{b_k}$$

مقسوم‌علیهی از n است اگر و تنها اگر هیچ‌یک از نماها، مانند b_i، از نمای نظیرش، a_i، در تجزیهٔ n بزرگتر نباشد؛ یعنی اگر و تنها اگر

$$۰ \leqslant b_i \leqslant a_i$$

بنابراین $(a_۱ + ۱)$ انتخاب برای $b_۱$، و $(a_۲ + ۱)$ انتخاب برای $b_۲$ وجود دارد و الی آخر؛ چون نحوهٔ انتخاب b_iها مستقل از یکدیگر است، دستور بالا به‌دست می‌آید.

اینک، $\tau(n)$ فرد است اگر و تنها اگر همهٔ عاملهای آن، $(a_i + ۱)$ها، فرد باشند، یعنی اگر و تنها اگر همهٔ a_iها زوج باشند. بنابراین نتیجه مهمی که به‌دست می‌آوریم این است که $\tau(n)$ فرد است اگر و تنها اگر n مربع کامل باشد. بنابراین اگر یکی از دنباله‌های موردنظر ما جملهٔ فردی داشته باشد، جملهٔ قبل از آن مربع کاملی ترسناک خواهد بود. البته جمله‌ای قبل از جملهٔ اول وجود ندارد، بنابراین اینکه دنباله‌ای با عددی فرد آغاز شود جایز است. از اینکه بگذریم، در اینجا دوری کردن از مربعهای کامل دوری کردن از عددهای فرد است.

اینک ویژگی مهمی از $\tau(n)$ را ثابت می‌کنیم:

$$\tau(n) < n, \quad n > ۲$$

اگر d مقسوم‌علیهی از n باشد، مثلاً k بار در n جای می‌گیرد و می‌توان نوشت $dk = n$. در این صورت k نیز مقسوم‌علیهی از n و (d, k) جفتی از مقسوم‌علیه‌های متمم است. اینک بدیهی است که d و k

هردو از $\sqrt{n}$ بیشتر نیستند، زیرا در غیر این صورت dk بزرگتر از n می‌شود. از طرف دیگر هردو آنها از $\sqrt{n}$ کوچکتر نیز نیستند، زیرا در غیر این صورت $dk < n$. بنابراین در هر جفت از مقسوم‌علیه‌های متمم نابرابر، به‌ناچار یکی باید از $\sqrt{n}$ کمتر و دیگری باید از $\sqrt{n}$ بیشتر باشد. البته در حالتی که n مربع کامل باشد، $\sqrt{n}$ خودش مقسوم‌علیهی خود-متمم است. (در اینجا توجه می‌کنیم که چون عموماً مقسوم‌علیه‌ها جفت‌جفت‌اند و ممکن است مقسوم‌علیه اضافی $\sqrt{n}$ نیز به آنها افزوده شود، می‌توانیم برهان دیگری از این نتیجه به‌دست آوریم که $\tau(n)$ فرد است اگر و تنها اگر n مربع کامل باشد.) حال از آنجا که هر جفت متمم لزوماً شامل عدد صحیحی است که از $\sqrt{n}$ بزرگتر نیست، در صورتی که جفت خود-متمم $(\sqrt{n}, \sqrt{n})$ را نیز به‌حساب آوریم، بیش از $[\sqrt{n}]$ (جزءِ صحیح $\sqrt{n}$) جفت از آنها وجود ندارد. در نتیجه به‌ازای هر n،

$$\tau(n) \leqslant ۲[\sqrt{n}]$$

اینک اگر n مربع باشد، $\sqrt{n}$ مقسوم‌علیه است، ولی سهم جفت $(\sqrt{n}, \sqrt{n})$ در $\tau(n)$ به‌جای ۲ واحد فقط ۱ واحد است و در نتیجه

$$\tau(n) \leqslant ۲[\sqrt{n}] - ۱ < ۲[\sqrt{n}]$$

اگر n مربع نباشد، آن‌وقت $\sqrt{n}$ عددی صحیح نیست و در نتیجه $[\sqrt{n}] < \sqrt{n}$ و بازهم

$$\tau(n) \leqslant ۲[\sqrt{n}] < ۲\sqrt{n}$$

بنابراین به‌ازای هر n، $\tau(n) < ۲\sqrt{n}$.

حال بدیهی است که به‌ازای $n > ۴$، $۴n < n \times n$ و $۲\sqrt{n} < n$، و در نتیجه $\tau(n) < n$. ولی نابرابری $\tau(n) < n$ وقتی‌که $n = ۳, ۴$ نیز برقرار است (زیرا $\tau(۳) = ۲ < ۳$ و $\tau(۴) = ۳ < ۴$). پس سرآخر

$$\tau(n) < n, \quad n > ۲$$

بنابراین دنبالهٔ n، $\tau(n)$، $\tau(\tau(n))$، $\cdots$، تا جایی که جمله‌هایش بزرگتر از ۲ هستند اکیداً نزولی است. ولی هیچ دو جمله‌ای در این دنباله از ۲ کوچکتر نیست. تنها عدد طبیعی که فقط یک مقسوم‌علیه دارد عدد ۱ است و فقط زمانی در دنباله ۱ داریم که جملهٔ قبل آن نیز ۱ باشد؛ در نتیجه، تنها دنباله‌ای که شامل عدد ۱ است دنبالهٔ $(۱, ۱, ۱, \cdots)$ است. چون دنباله‌های ما با n آغاز می‌شوند و $n > ۱$، کوچکترین عضو ممکن آنها ۲ است و چون خودشان تا جایی اکیداً نزولی‌اند، این ویژگی مهم به‌دست می‌آید که در هر دنباله نهایتاً باید به عدد ۲ برسیم و پس از آن، به دلیل اینکه $\tau(۲) = ۲$، این جمله به‌طور نامحدودی تکرار می‌شود.

حال بدیهی است که $\tau(n) = ۲$ اگر و تنها اگر n عددی اول باشد. بنابراین در دنباله‌هایی که با عدد اولی مانند p آغاز می‌شوند، امکان اینکه مربع کاملی وجود داشته باشد نیست:

$$p, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, \cdots$$

ثابت خواهیم کرد که این‌گونه دنباله‌ها تنها دنباله‌هایی هستند که ویژگی موردنظر را دارند.

فرض کنید جملهٔ اول دنباله‌ای عددی صحیح و مرکب مانند n باشد. در این صورت $n \geqslant ۴$ و چون n اول نیست، $\tau(n)$ برابر با ۲ نیست، و در نتیجه تکرار بی‌پایان ۲ها دست‌کم پیش از جملهٔ سوم آغاز نمی‌شود. همان‌طورکه معلوم شد، تنها راهی که ممکن است ۲ ظاهر شود این است که جملهٔ پیش از آن عددی اول باشد. البته ممکن است این جملهٔ قبلی ۲ دیگری باشد، ولی جمله‌ای که بلافاصله پیش از اولین ۲ قرار دارد باید عددی اول و فرد باشد. چون این عدد فرد است، جملهٔ قبلی‌اش چیزی جز مربعی کامل نیست. از این‌رو در دنباله‌ای که پس از سه جمله یا بیشتر به اولین ۲ می‌رسد، وجود مربعی کامل حتمی است.

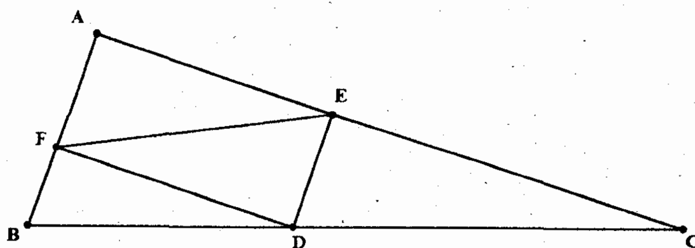
$$۲, ۲, ۲, \cdots, \text{اولین ۲}, \text{عدد اول فرد}, \text{مربع کامل}, \cdots$$

از آنجا که n هایی که عددهایی اول‌اند تنها مقادیری هستند که به‌ازای آنها دنبالهٔ ۲ها زودتر آغاز می‌شود، بنابراین فقط آنها هستند که دنباله‌های خالی از مربع را در خانوادهٔ موردنظر ایجاد می‌کنند.

۵. مسأله‌ای از فرانسه

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۴۶)

گاهی طرز ارائهٔ مسأله‌ای ناخودآگاه فریبمان می‌دهد. برای مثال مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید.



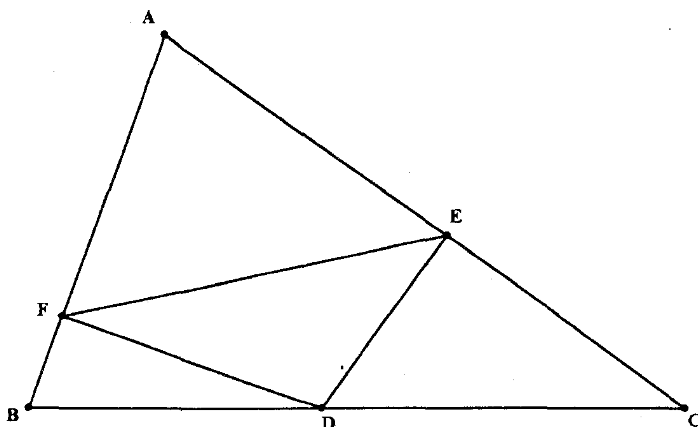
شکل۱۳

از نقطهٔ D روی وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، عمودهای DE و DF را به‌ترتیب بر ضلعهای AC و AB رسم می‌کنیم. جای D را طوری تعیین کنید که طول EF مینیمم شود.

روشن است که $AFDE$ مستطیل است و می‌توانیم به‌جای EF قطر دیگر مستطیل یعنی AD را در نظر بگیریم. بدیهی است که وقتی D پای ارتفاع نظیر رأس A باشد، طول AD مینیمم و از اینجا معلوم می‌شود که در حقیقت مسأله چقدر ساده است.

در این مثال همه‌چیز به این مطلب بستگی دارد که $\angle A$ زاویه‌ای قائمه است، زیرا در این صورت همواره قطرهای EF و AD برابرند. درصورتی‌که $\angle A$ قائمه نباشد کار به این سادگی نیست. احتمالاً

تا اینجا با این مثال آنقدر گمراه شده‌اید که بتوانم مسأله‌ای را که از سوی فرانسه پیشنهاد شد و از آن استفاده نشد مطرح کنم.



شکل۱۴

در مثلث نامشخص ABC، D کجا باشد تا EF مینیمم شود؟

راه‌حل

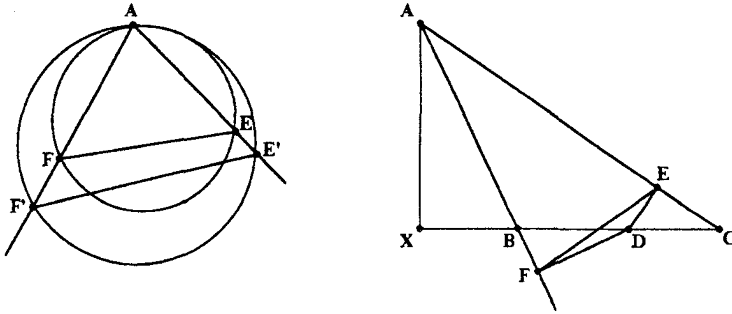
با کمال تعجب، پاسخ همان پاسخ قبل است: D باید پای ارتفاع نظیر رأس A باشد؛ زیرا بازهم AD کمترین طول را دارد. با وجود این، در این حالت ارتباط بین AD و EF مانند قبل کاملاً روشن نیست. در حقیقت نکتهٔ مهم در این مثال این نیست که $AFDE$ مستطیل است، بلکه این است که $AFDE$ همواره محاطی است. نقطهٔ D هر جایی روی BC باشد، همواره EF مقابل به زاویه‌ای محاطی، یعنی $\angle A$، است. ولی بدیهی است که هر چه دایرهٔ محیطی کوچکتر باشد وتر EF نیز کوچکتر می‌شود (شکل ۱۵). از آنجا که زاویه‌های E و F قائمه‌اند، نتیجه می‌گیریم که AD قطری از دایره است. پس در صورتی دایره کوچکترین اندازه است که AD کوچکترین اندازه باشد.

اگر حرکت D روی BC فراتر از B یا C مجاز نباشد، و اگر یکی از زاویه‌های B و C منفرجه باشد، بازهم این نحوهٔ استدلال درست است، اما در این حالت کوچکترین دایره هنگامی به‌دست می‌آید که D در رأس زاویهٔ منفرجه قرارگیرد.

۶. مسأله‌ای از بلغارستان

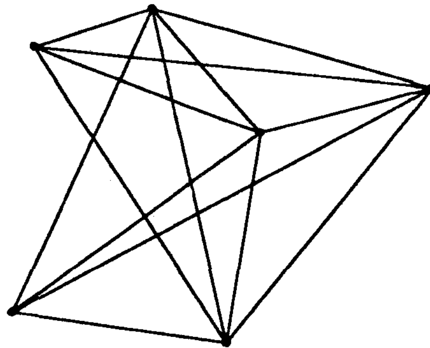
(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۰۹)

فرض کنید n نقطه روی صفحه انتخاب شده‌اند و پاره‌خطهایی بین برخی از آنها رسم شده است،



شکل۱۵

به‌طوری‌که به هر ترتیبی که ۴ نقطه از آنها انتخاب کنیم، پاره‌خطهایی که ۳ نقطه از این ۴ نقطه را به‌هم وصل می‌کنند مثلثی بسازند. کمترین تعداد پاره‌خطهای لازم برای رسیدن به این هدف چیست و چگونه می‌توانیم این پاره‌خطها را در این حالت مینیمم تعیین کنیم؟



شکل۱۶

راه‌حل

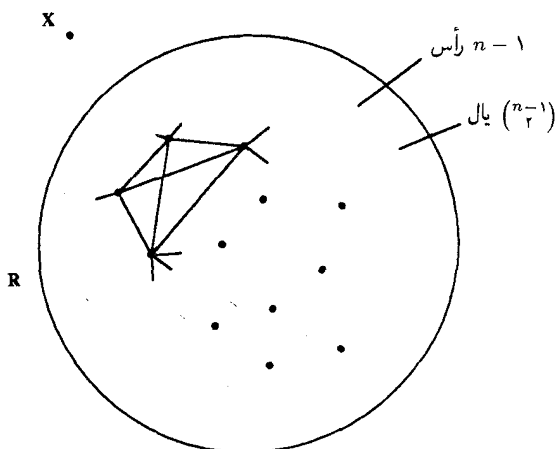
بدیهی است که می‌توانیم پیکربندی حاصل را به‌صورت گرافی در نظر بگیریم که در آن n نقطهٔ موردنظر رأسها و پاره‌خطهای رسم شده یالهای آن باشند. به این ترتیب مفید است که از برخی مفاهیم سادهٔ نظریهٔ گراف استفاده کنیم. یادآوری می‌کنیم که تعداد یالهای مجاور به رأسی مانند v را درجهٔ v می‌نامیم و آن‌را به $d(v)$ نشان می‌دهیم. همچنین چون هر یال دو سر دارد، پس سهم یال در درجهٔ رأسهای دو سرش ۱ واحد است. از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع درجه‌های همهٔ رأسها صرفاً تعداد دو سر یالها، و بنابراین دقیقاً دو برابر تعداد یالها، e، است؛ به‌عبارت دیگر

$$\sum d(v) = ۲e$$

پس از مقداری آزمایش این‌طور به نظر می‌رسد که بهترین کاری که می‌توانیم در مورد برقراری

شرط مربوط به تشکیل مثلثها انجام دهیم این است که رأسی مانند X را کاملاً منفرد بگذاریم و هر تعداد یال ممکنی را که می‌توانیم بین $n - ۱$ رأس دیگر، که مجموعهٔ آنها را R می‌نامیم، قرار دهیم. برای این کار $\binom{n-۱}{۲} = \frac{۱}{۲}(n-۱)(n-۲)$ یال لازم است و بدیهی است که به این ترتیب وضعیت مطلوب حاصل می‌شود:

هر ۳ رأس از ۴ رأس R، مثلثی می‌سازند و اگر X در بین ۴ رأسی باشد که انتخاب شده‌اند، ۳ رأس دیگر در R هستند و در نتیجه مثلثی مشخص می‌کنند.



شکل۱۷

در حقیقت اگر این وضعیت حالتی مینیمم باشد، سؤال مربوط به چگونگی انتخاب یالها چیز بی‌ارزشی خواهد بود. می‌خواهیم ثابت کنیم که نمی‌توان این مسأله را با تعداد کمتری از $\binom{n-۱}{۲}$ یال حل کرد. بنابراین می‌کوشیم که از فرض نداشتن بیش از $\binom{n-۱}{۲} - ۱$ یال به تناقض برسیم. اگر

$$e \leqslant \binom{n-۱}{۲} - ۱ = \frac{۱}{۲}(n-۱)(n-۲) - ۱$$

آنگاه

$$\sum d(v) = ۲e \leqslant (n-۱)(n-۲) - ۲ = n^۲ - ۳n$$

و

$$\text{درجهٔ میانگین} \leqslant \frac{۱}{n}(n^۲ - ۳n) = n - ۳$$

از آنجا که همهٔ درجه‌ها از مقدار میانگینشان بیشتر نیستند، به‌ازای رأسی مانند v،

$$d(v) \leqslant n - ۳$$

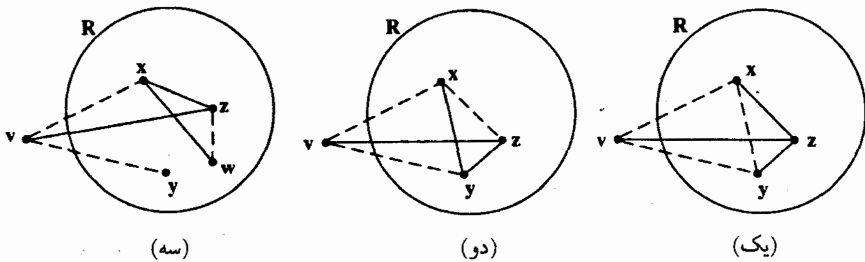
که در این صورت v دست‌کم به دو رأس دیگر مانند x و y متصل نیست. حتی اگر v به همهٔ $n-3$ رأس دیگر بجز خودش، x و y متصل باشد، به‌سادگی می‌توان به این تناقض رسید که دست‌کم $\binom{n-1}{2}$ یال در گراف لازم است تا مطمئن باشیم که هر ۴ رأسی که انتخاب کنیم، ۳ تا از آنها رأسهای مثلثی هستند.

فرض کنید R مجموعهٔ $n-1$ رأس غیر از v باشد. اگر بین دو رأس از R یالی وجود نداشته باشد، سه حالت سادهٔ زیر پیش می‌آید:

یک) یال xy وجود ندارد،

دو) یالی مانند xz مجاور رأس x (یا معادلاً مجاور رأس y) وجود ندارد،

سه) یالی مانند wz که هیچ‌یک از دو انتهایش در x یا y واقع نیست وجود ندارد.



شکل۱۸

بدیهی است که در حالت (یک) رأس چهارم، z، هر چه باشد، چهارتایی (v, x, y, z) فاقد مثلث است. به‌همین ترتیب در حالت (دو) چهارتایی (v, x, y, z) و در حالت (سه) چهارتایی (v, x, z, w) شامل مثلث نیست. بنابراین نمی‌توانیم یالی از R حذف کنیم و در نتیجه تمامی $\binom{n-1}{2}$ یال ممکن باید وجود داشته باشند. به این ترتیب تناقض موردنظر به‌دست می‌آید.

۷. مسأله‌ای از آلمان‌غربی

اینک توجه خود را به مسألهٔ ترکیبیاتی جالبی که از سوی آلمان غربی پیشنهاد شده بود معطوف می‌کنیم.

درصورتی‌که تنها رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را در اختیار داشته باشیم، چند عدد صحیح n رقمی وجود دارد که اختلاف رقمهای مجاور آنها دقیقاً برابر با ۱ است؟

راه‌حل

همواره در مسائلی از این قبیل عاقلانه این است که چند حالت نخست را به‌تفصیل بررسی کنیم:

اگر $n = 1$، عددهای موردنظر ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ هستند، و تعدادشان برابر با ۵ است.

اگر $n = 2$، عددها ۱۲، ۲۱، ۲۳، ۳۲، ۳۴، ۴۳، ۴۵ و ۵۴ هستند، و تعدادشان برابر با ۸ است.

اگر $n = 3$، عددها ۱۲۱، ۱۲۳، ۲۱۲، ۲۳۲، ۲۳۴، ۳۲۱، ۳۲۳، ۳۴۳، ۳۴۵، ۴۳۲، ۴۳۴، ۴۵۴، ۵۴۳ و ۵۴۵ هستند، و تعدادشان برابر با ۱۴ است.

اگر تعداد عددهای صحیح n رقمی را با a_n و تعداد عددهایی از آنها را که به رقم i ختم می‌شوند با $a(n,i)$ نشان دهیم، بدیهی است که

$$a(n,1) = a(n-1,2)$$

$$a(n,2) = a(n-1,1) + a(n-1,3)$$

$$a(n,3) = a(n-1,2) + a(n-1,4)$$

$$a(n,4) = a(n-1,3) + a(n-1,5)$$

$$a(n,5) = a(n-1,4)$$

به کمک نخستین مقادیری که در بالا در حالتهایی که $n = 1,2,3$ حاصل شدند، می‌توانیم جدول زیر را تا جایی که بخواهیم ادامه دهیم.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	$\cdots$	$2k+1$	$2k+2$	$2k+3$	$2k+4$
$a(n,1)$	۱	۱	۲	۳	۶	۹	۱۸	$\cdots$	$2\times3^{k-1}$	3^k	2×3^k	3^{k+1}
$a(n,2)$	۱	۲	۳	۶	۹	۱۸	۲۷	$\cdots$	3^k	2×3^k	3^{k+1}	$2\times3^{k+1}$
$a(n,3)$	۱	۲	۴	۶	۱۲	۱۸	۳۶	$\cdots$	$4\times3^{k-1}$	2×3^k	4×3^k	$2\times3^{k+1}$
$a(n,4)$	۱	۲	۳	۶	۹	۱۸	۲۷	$\cdots$	3^k	2×3^k	3^{k+1}	$2\times3^{k+1}$
$a(n,5)$	۱	۱	۲	۳	۶	۹	۱۸	$\cdots$	$2\times3^{k-1}$	3^k	2×3^k	3^{k+1}
a_n	۵	۸	۱۴	۲۴	۴۲	۷۲	۱۲۶	$\cdots$				

بدیهی است که در این جدول نوعی تقارن وجود دارد به‌طوری‌که $a(n,1) = a(n,5)$ و $a(n,2) = a(n,4)$. با توجه به اینکه $a_1 = 5$، $a_3 = 14$ و $a_5 = 42$، حدس می‌زنم a_{k+1} همواره عددی کاتالان، یعنی به شکل $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$، است، و برای این همه زیرکی به خودم تبریک می‌گویم. با وجود این، اینکه $a_7 = 126$ فوراً ناامیدم کرد زیرا عدد کاتالان بعدی ۱۳۲ است. به‌هرحال روشن است که جدول بالا اساساً از دو دنبالهٔ

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, \cdots, 3^k, 2\times3^k, \cdots \quad (k \geqslant 0)$$

و

$$1, 2, 4, 6, 12, 18, 36, \cdots, 4\times3^{k-1}, 2\times3^k, \cdots \quad (k \geqslant 1)$$

تشکیل شده است.

اینک کار را به استقرا دنبال می‌کنیم. به‌عنوان فرض استقرا می‌پذیریم که به‌ازای عدد صحیحی مانند k، $k \geqslant ۱$، ده درایه‌ای که در ستونهای $۲k+۱$ و $۲k+۲$ی جدول آمده‌اند همگی درست‌اند. در این صورت می‌توانیم با استفاده از برابریهای بازگشتی در بالا تحقیق کنیم که درایه‌های ستونهای $۲k+۳$ و $۲k+۴$ همانهایی هستند که در جدول آمده‌اند. از آنجا که این درایه‌ها و درایه‌های نظیرشان در ستونهای $۲k+۱$ و $۲k+۲$ یک شکل دارند و چون این درایه‌ها از روی درایه‌های ستونهای ۳ و ۴ پدید آمده‌اند، به کمک استقرا نتیجه می‌گیریم که دستورهای این ستونها به‌ازای هر k، $k \geqslant ۱$، درست‌اند. بنابراین اگر درایه‌های ستونها را جمع کنیم، به‌سادگی نتیجه می‌شود که $a_۱ = ۵$ و به‌ازای $k \geqslant ۰$،

$$a_{۲k+۲} = ۸ \times ۳^k$$

$$a_{۲k+۳} = ۸ \times ۳^k + ۲ \times ۳^{k+۱}$$

از آنجا که این دستورها شباهت زیادی به هم دارند، می‌توانیم آنها را یکجا بنویسیم و دستور

$$a_n = ۸ \times ۳^{[(n-۲)/۲]} + (۱ - (-۱)^n] \times ۳^{[n/۲]}$$

را به‌دست آوریم که در آن کروشه نشانهٔ «جزءِ صحیح» است.

۸. مسأله‌ای از استرالیا

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۷۶)

نقاط $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ مرکزهای سه دایرهٔ $K_۱$، $K_۲$ و $K_۳$ هستند که از نقطهٔ مشترک P می‌گذرند (شکل ۱۹). مطابق شکل، دومین نقطهٔ برخورد این دایره‌ها عبارت‌اند از A ، B و C. از نقطهٔ دلخواه X روی $K_۱$، XA را امتداد می‌دهیم تا $K_۲$ را در Y، و XC را امتداد می‌دهیم تا $K_۳$ را در Z قطع کند. ثابت کنید X را هر جایی روی $K_۱$ انتخاب کنیم،

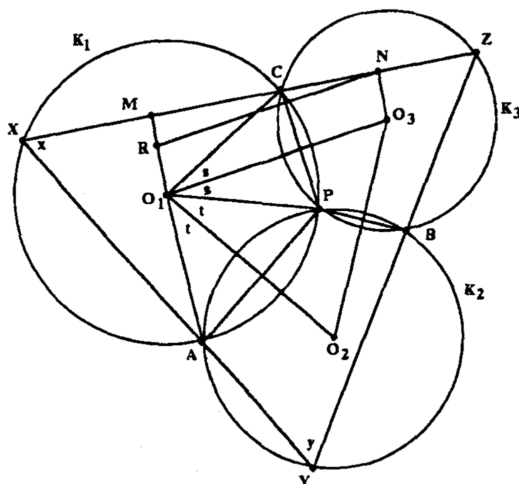
یک) Y، B و Z همخط‌اند، و

دو) هیچ‌وقت مساحت ΔXYZ از چهار برابر مساحت مثلث مرکزی، $O_۱O_۲O_۳$، بیشتر نمی‌شود.

راه‌حل

(یک) با انتخاب X روی $K_۱$ جای Y روی $K_۲$ تعیین می‌شود، و درصورتی‌که X و Y معین شوند، خطوط XC و YB مشخص می‌شوند. حال XC دایرهٔ $K_۳$ را در Z قطع می‌کند و از ما خواسته شده است که ثابت کنیم YB نیز از این نقطه می‌گذرد. به عبارت دیگر می‌خواهیم ثابت کنیم XC و YB روی دایرهٔ $K_۳$ با یکدیگر برخورد می‌کنند.

اینک اگر مطابق شکل اندازهٔ زاویه‌های X و Y را x و y بگیریم، زاویه‌های مقابل آنها، CPA در $K_۱$ و APB در $K_۲$، مکملشان و برابرند با $۱۸۰^\circ - x$ و $۱۸۰^\circ - y$. بنابراین زاویهٔ CPB



شکل۱۹

در $K_۳$ برابر است با

$$۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - x) - (۱۸۰^\circ - y) = x + y$$

و در نتیجه زاویه‌ای که در قسمتی از $K_۳$ واقع است که در طرف دیگر وتر BC قرار دارد برابر با $۱۸۰^\circ - (x+y)$ است. ولی چون زاویه‌های X و Y برابرند با x و y، پس خطوط XC و YB هرجا که برخورد کنند مثلثی می‌سازند که زاویهٔ رأس سوم آن برابر با $۱۸۰^\circ - (x+y)$ است؛ به عبارت دیگر، وتر CB مقابل به زاویه‌ای است که در نقطهٔ برخورد آنها قرار دارد و برابر با $۱۸۰^\circ - (x+y)$ است. از آنجا که این مقدار به اندازهٔ همان زاویه‌ای است که وتر BC در دایرهٔ $K_۳$ جدا می‌کند، نتیجه می‌گیریم که XC و YB باید روی دایرهٔ $K_۳$ با یکدیگر برخورد کنند و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

(دو) از آنجا که خط‌المرکزین $O_۱O_۳$ عمودمنصف وتر مشترک CP در دایره‌های $K_۱$ و $K_۳$ است، C تصویر آینه‌ای P روی $O_۱O_۳$ است. در نتیجه

$$\angle PO_۱O_۳ = \angle CO_۱O_۳$$

به همین ترتیب، قرینهٔ P نسبت به $O_۱O_۲$ نقطهٔ A است و

$$\angle PO_۱O_۲ = \angle AO_۱O_۲$$

بنابراین

$$\angle AO_۱C = ۲\angle O_۲O_۱O_۳$$

ولی زاویهٔ $AO_۱C$ که در $K_۳$ روی وتر AC قرار دارد، دو برابر زاویهٔ x است، یعنی اندازهٔ زاویه‌ای که در

نقطهٔ X روی دایره و مقابل به AC واقع است. در نتیجه در $\triangle O_۱O_۲O_۳$،

$$\angle O_۱ = x$$

به همین ترتیب

$$\angle O_۲ = y$$

بنابراین مثلثهای XYZ و $O_۱O_۲O_۳$ زاویه‌هایی برابر دارند و در نتیجه متشابه‌اند.

اینک مطابق شکل عمودهای $O_۱M$ و $O_۳N$ را بر XZ و NR را موازی با $O_۱O_۳$ رسم می‌کنیم. در این صورت M و N وسط وترهای XC و CZ هستند و در نتیجه MN نصف XZ است. همچنین در متوازی‌الاضلاع $RO_۱O_۳N$، $O_۱O_۳ = RN$ که در آن RN وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ RMN است. در نتیجه

$$O_۱O_۳ = RN \geqslant MN = \frac{۱}{۲}XZ$$

و

$$\frac{XZ}{O_۱O_۳} \leqslant ۲$$

(وقتی‌که XZ موازی $O_۱O_۳$ باشد، مثلث RMN تباهیده است، و در این صورت $RN = MN$ و $XZ = ۲O_۱O_۳$).

بنابراین نسبت ضلعهای نظیر در این مثلثهای متشابه بزرگتر از ۲ نیست و چون نسبت مساحت مثلثهای متشابه با مجذور نسبت ضلعهای نظیر آنها متناسب است، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید:

$$\frac{\text{مساحت } \triangle XYZ}{\text{مساحت } \triangle O_۱O_۲O_۳} \leqslant ۲^۲ = ۴$$

۹. مسأله‌ای از فنلاند

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۰۹؛ راه‌حل مشابهی در ۱۹۸۹، ۱۶۵ آمده است.)

فرض کنید $A = \{a_۱ < a_۲ < a_۳ < \cdots\}$ دنباله‌ای نامتناهی و صعودی از عددهای طبیعی باشد که در آن تعداد مقسوم‌علیه‌های اول هریک از جمله‌ها، درصورتی‌که مقسوم‌علیه‌های مکرر را نیز به‌حساب بیاوریم، هیچ‌گاه بیشتر از ۱۹۸۷ نیست. ثابت کنید همواره می‌توانیم زیردنباله‌ای نامتناهی از A مانند

$$B = \{b_۱ < b_۲ < b_۳ < \cdots\}$$

انتخاب کنیم به‌طوری‌که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر جفت از جمله‌های آن عددی یکسان باشد.

راه‌حل

از آنجا که تعداد عددهای اول نامتناهی است، هرگز مقسوم‌علیه‌هایی که جمله‌های A را می‌سازند تمام نمی‌شود. اگر تعداد عددهای اولی که در ساختن a_iها به‌کار رفته‌اند در مجموع برابر با عددی متناهی

مانند $n-1$ باشد، آنگاه برای گزینش هریک از ۱۹۸۷ مقسوم‌علیهی که در ترکیب هر a_iای وجود دارد، تنها n انتخاب داریم، و هریک از این مقسوم‌علیه‌ها یا یکی از این $n-1$ عدد اول است و یا عدد ۱، و به این ترتیب تنها امکان ساختن n^{1987} جملهٔ مختلف مانند a_i وجود دارد. بنابراین چون A نامتناهی است، پس باید بی‌نهایت عدد اول مختلف در ساختن آن به‌کار رود.

حال اگرچه هیچ عدد اولی بیش از ۱۹۸۷ بار در هیچ جمله‌ای تکرار نمی‌شود، ولی هر عدد اول ممکن است در سرتاسر دنبالهٔ A به دفعات دلخواه به‌کار رود. بدیهی است که در این صورت یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

یا (یک) هیچ عدد اولی بی‌نهایت بار در عضوهای دنباله به‌کار نرفته است؛

و یا (دو) دست‌کم یک عدد اول بی‌نهایت بار در بین مقسوم‌علیه‌های a_iها ظاهر شده است.

این حالتها را به‌ترتیب بررسی می‌کنیم.

حالت (یک). هیچ عدد اولی بی‌نهایت بار ظاهر نشده است: در این حالت صرفنظر از اینکه مقسوم‌علیه‌های اول a_1 که تعدادشان ۱۹۸۷ یا کمتر است چند بار در بقیهٔ عضوهای دنباله تکرار شده‌اند، جمله‌ای چون a_i وجود دارد که شامل آخرین آنهاست. بنابراین هر جمله‌ای چون a_j، $a_j > a_i$، نسبت به a_1 اول است. به این ترتیب فرض می‌کنیم که دنبالهٔ مطلوب، B، با جمله‌های b_1، $b_1 = a_1$، و b_2 آغاز شود که b_2 یکی از این a_jهاست.

به همین ترتیب هیچ‌یک از مقسوم‌علیه‌های اول b_2 در جمله‌ای مانند a_k و جمله‌های پس از آن ظاهر نمی‌شود و از اینجا به بعد هر جمله‌ای مانند a_t نسبت به هر دو جملهٔ b_1 و b_2 اول است. فرض کنید b_3 یکی از این a_tها باشد. به این ترتیب با ادامه دادن این کار b_n را از جایی فراتر از جایی که از آن پس مقسوم‌علیه‌های اول b_{n-1} دیگر ظاهر نمی‌شوند انتخاب می‌کنیم. در این صورت هر جملهٔ تازه‌ای مانند b_n در جایی فراتر از جایی که تا آنجا مقسوم‌علیه‌های اول جمله‌های قبلی، یعنی b_1، b_2، $\cdots$ و b_{n-1}، ظاهر شده‌اند قرار دارد و بنابراین نسبت به هریک از آنها اول است. از اینجا نتیجه می‌شود که هر جفتی مانند (b_i, b_j) باید نسبت به‌هم اول باشند، زیرا یکی از دو جملهٔ b_i و b_j باید قبل از دیگری باشد. به این ترتیب زیردنباله‌ای قابل‌قبول مانند B تولید می‌شود.

حالت (دو). دست‌کم یک عدد اول بی‌نهایت بار در عضوهای دنباله ظاهر شده است: هر عدد اول مانند p_1 که بی‌نهایت بار در عضوهای دنباله ظاهر شود باید در تعدادی نامتناهی از a_iها ظاهر شود، زیرا ممکن نیست در هریک از آنها بیش از ۱۹۸۷ بار ظاهر شود. حال در تجزیهٔ عبارتهایی که در آنها p_1 وجود دارد، نماهای مربوط به توانهایی مانند p_1^r در محدودهٔ متناهی $\{1, 2, \cdots, 1987\}$ واقع‌اند و در نتیجه نمایی مانند r_1 باید بی‌نهایت بار تکرار شود. به عبارت دیگر بی‌نهایت جمله وجود دارد که در آنها p_1 ظاهر می‌شود و نمای توان p_1 در آنها یکسان و مثلاً برابر با r_1 است. اینک بقیهٔ جمله‌های A را

حذف می‌کنیم و فقط زیردنبالهٔ A_1 را در نظر می‌گیریم که از جمله‌هایی تشکیل شده که تجزیهٔ همهٔ آنها به مقسوم‌علیه‌های اول شامل $p_1^{r_1}$ است.

در این صورت بدیهی است که در هر جملهٔ A_1 عدد اول p_1، r_1 تا از ۱۹۸۷ مکان مقسوم‌علیه‌های آن عدد را اشغال می‌کنند. اینک در مجموعهٔ همهٔ مقسوم‌علیه‌های اول دیگری که در A_1 وجود دارند، ممکن است عدد اول دیگری مانند p_2 نیز بی‌نهایت بار تکرار شود. اگر چنین باشد، آن‌وقت باید مانند آنچه در مورد p_1 گفتیم زیردنباله‌ای نامتناهی چون A_2 از A_1 وجود داشته باشد که در هر جمله‌اش p_2 دقیقاً با یک توان مثلاً $p_2^{r_2}$ ظاهر شود. در این حالت، بازهم توجه خود را به A_2 معطوف می‌کنیم. باز ممکن است بین مقسوم‌علیه‌های اول باقی‌ماندهٔ A_2 عدد اولی مانند p_3 بی‌نهایت بار ظاهر شود که ما را به زیردنبالهٔ دیگری مانند A_3 برساند که همهٔ جمله‌هایش شامل حاصل‌ضرب $p_1^{r_1}p_2^{r_2}p_3^{r_3}$ باشند. ولی چنین pهایی محدودند، زیرا در هر جمله مانند a_j فقط ۱۹۸۷ مکان برای مقسوم‌علیه‌های اول وجود دارد. مقسوم‌علیه مرکب $p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_i^{r_i}$ در هر جملهٔ زیردنبالهٔ حاصل، A_i، $r_1+r_2+\cdots+r_i$ مکان را اشغال می‌کند. این کار باید پیش از اینکه همهٔ ۱۹۸۷ مکان اشغال شوند پایان یابد، زیرا در غیر این صورت همهٔ جمله‌های A_i برابر خواهند بود. بنابراین زمانی می‌رسد که دیگر هیچ عدد اولی به غیر از عددهای اول شناخته شدهٔ p_1، p_2، $\cdots$ و p_i بی‌نهایت بار در جمله‌های A_i تکرار نمی‌شود. اگر در اینجا مقسوم‌علیه مشترک $p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_i^{r_i}$ را برابر با P بگیریم، می‌توانیم این A_iی آخر را به‌صورت زیر بنویسیم

$$A_i=\{Pc_1<Pc_2<Pc_3<\cdots\}$$

در این حالت دنبالهٔ مقسوم‌علیه‌های کمکی

$$C=\{c_1<c_2<c_3<\cdots\}$$

دنباله‌ای است که هر جمله‌اش حداکثر حاصل‌ضرب

$$1987-(r_1+r_2+\cdots+r_i)$$

مقسوم‌علیه اول است و هیچ مقسوم‌علیه اولی بی‌نهایت بار در آن تکرار نمی‌شود. بنابر حالت (یک) در بالا C شامل زیردنباله‌ای نامتناهی مانند

$$\{c_1<c_j<c_k<\cdots\}$$

است که در آن هر جفت از جمله‌ها نسبت به‌هم اول‌اند. بالاخره B، زیردنبالهٔ نظیر آن از A_i که به‌صورت زیر است

$$B=\{Pc_1<Pc_j<Pc_k<\cdots\}$$

این ویژگی را دارد که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر جفت از جمله‌هایش، مانند (Pc_s, Pc_t)، عددی یکسان و برابر با P است.

دو مسأله از المپیاد امریکا، ۱۹۸۸

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۶۴)

مسألهٔ ۱

فرض کنید S مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, ۲۰\}$ باشد و هر زیرمجموعهٔ ۹ عضوی S با عضوی از S برچسب‌گذاری شده باشد. بنابراین برای مثال

ممکن است برچسب مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$، ۴،
برچسب مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۱۰\}$ هم ۴،
و برچسب مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۱۱\}$، ۱۷ باشد، و الی آخر.

مجموعهٔ S، $۱۶۷۹۶۰ = \binom{۲۰}{۹}$ زیرمجموعهٔ ۹ عضوی مختلف دارد و در نتیجه هر برچسب به‌طور میانگین ۸۳۹۸ بار به‌کار می‌رود.

ثابت کنید هرطور که این برچسب‌گذاریها را انجام داده باشیم، همواره زیرمجموعه‌ای ۱۰ عضوی از S مانند T با این ویژگی وجود دارد که

هیچ عضو T برچسب زیرمجموعه‌ای که از ۹ عضو دیگرش ساخته می‌شود نیست.

راه‌حل

در تلاش برای حل کردن این مسأله دریافتم که بین رهیافتهای مستقیم و غیرمستقیم سردرگم شده‌ام؛ یکی پس از دیگری ناکامی در ساختن مستقیم T به‌وسیلهٔ جاگذاری عضوهای ناهمگون و نیز در رسیدن به تناقض با فرض عدم وجود T. راه‌حل کوتاه زیر ممکن است این احساس را ایجاد می‌کند که مسأله فوق‌العاده ساده است. ولی این احساس بسیار گمراه‌کننده است، زیرا مدت زیادی طول کشید تا

توانستم به این دیدگاه روشنگر دست پیدا کنم.

نهایتاً به‌روش برهان خلف فرض کنید T وجود ندارد. در این حالت هر زیرمجموعهٔ ۱۰ عضوی مانند A دست‌کم یک عضو مانند x دارد که برچسب مربوط به زیرمجموعهٔ X متشکل از ۹ عضو دیگر A است. از این‌رو فرض کنید مجموعهٔ M از همهٔ $\binom{20}{10}$ تا زیرمجموعهٔ ۱۰ عضوی S تشکیل شده باشد که به شکل $(X;x)$ نوشته شده‌اند و در آنها x برچسب مربوط به زیرمجموعهٔ ۹ عضوی X است:

$$M = \{(X;x), (Y;y), (Z;z), \cdots\}$$

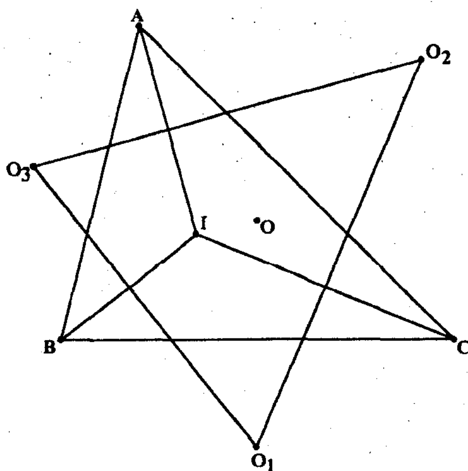
حال S تنها $\binom{20}{9}$ زیرمجموعهٔ ۹ عضوی دارد و چون بزرگترین جملهٔ ضریبهای دوجمله‌ای به‌شکل $\binom{20}{r}$ جملهٔ وسطی آنها یعنی $\binom{20}{10}$ است، پس تعداد زیرمجموعه‌های ۱۰ عضوی بیش از تعداد زیرمجموعه‌های ۹ عضوی است. بنابراین دو زیرمجموعه در M مانند A و B وجود دارند که یک زیرمجموعهٔ ۹ عضوی مانند X را نمایش می‌دهند:

$$A = (X;x), \qquad B = (X;y)$$

چون A و B متفاوت‌اند، پس x و y دو برچسب مختلف هستند که به یک مجموعهٔ ۹ عضوی مربوط می‌شوند، و به این ترتیب به تناقضی رسیدیم که راه‌حل را تمام می‌کند.

مسألهٔ ۲

فرض کنید از I مرکز دایرهٔ محاطی $\triangle ABC$ سه پاره‌خط به رأسهای آن وصل کرده‌ایم تا مثلث به سه مثلث کوچکتر افراز شود. اگر O_1، O_2 و O_3 مرکز دایره‌های محیطی این مثلثهای کوچک باشند، ثابت کنید دایره‌های محیطی مثلثهای $O_1O_2O_3$ و ABC هم‌مرکزاند؛ به عبارت دیگر، مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$، نقطه O، مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle O_1O_2O_3$ نیز هست.



شکل ۲۰

راه‌حل

از آنجا که I مرکز دایرهٔ محاطی $\triangle ABC$ است، پاره‌خطهایی که I را به رأسهای مثلث وصل می‌کنند زاویه‌های مثلث را نصف می‌کنند. بنابراین در $\triangle IAB$ مجموع زاویه‌های A و B برابر با $\frac{۱}{۲}(A+B)$ است و

$$\frac{۱}{۲}(A+B) < \frac{۱}{۲}(A+B+C) = ۹۰^\circ$$

و در نتیجه زاویهٔ I منفرجه است. حال می‌دانیم که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث منفرجه بیرون مثلث است و در نتیجه، مطابق شکل، $O_۳$ بیرون $\triangle ABC$ است. در مورد $O_۱$ و $O_۲$ نیز نتایج مشابهی درست است. این مطلب برای حل این مسأله اساسی نیست ولی کارها را ساده‌تر می‌کند.

از آنجا که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث روی عمودمنصف هر یک از ضلعهای آن قرار دارد، پس O و $O_۱$ هردو روی عمودمنصف BC هستند و در نتیجه $OO_۱$ حقیقتاً عمودمنصف BC است. به همین ترتیب $OO_۳$ و $O_۱O_۳$ به‌ترتیب عمودمنصفهای AB و IB هستند. اگر نقاط برخورد را مطابق شکل ۲۱ نامگذاری کنیم، از برابری زاویه‌های متقابل‌به‌رأس در D نتیجه می‌شود که زاویه‌های B و $O_۱$ در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $DO_۱E$ و DBF برابرند و

$$\angle O_۱ = \frac{۱}{۲}\angle B$$

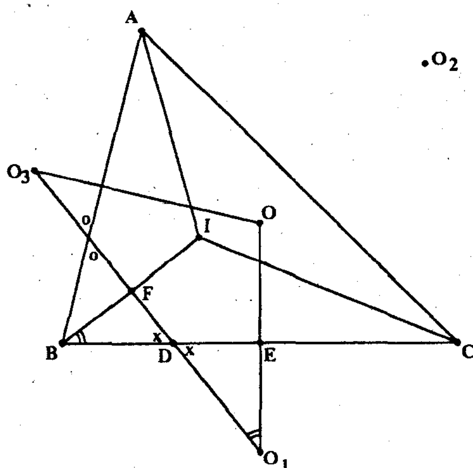
به همین ترتیب

$$\angle O_۳ = \angle B \text{ نصف دیگر}$$

و از این نتیجه می‌شود

$$\angle O_۱ = \angle O_۳$$

و در نتیجه $OO_۱$ و $OO_۳$ ساقهای برابر مثلث متساوی‌الساقین $OO_۱O_۳$ هستند. به همین ترتیب ثابت می‌شود $OO_۱ = OO_۲$ که در نتیجه $OO_۱ = OO_۲ = OO_۳$ و حکم نتیجه می‌شود.



شکل۲۱

مسأله‌ای از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۸

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۹۷)

ثابت کنید مجموعهٔ اعداد حقیقی مانند x که در نابرابری

$$\sum_{k=۱}^{۷۰} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{۵}{۴}$$

صدق می‌کنند اجتماع بازه‌های مجزایی است که مجموع طول آنها برابر با ۱۹۸۸ است.

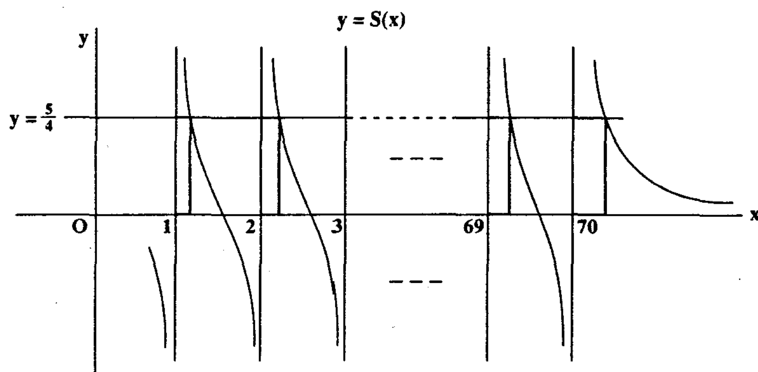
راه‌حل

جالب توجه است که چگونه عموماً مسألهٔ خوبی را مطرح می‌کنند که شامل عدد سال برگزاری همان مسابقه است. از نظر من این مسأله از این لحاظ هم جالب است که عددهای ساده‌ای مانند ۷۰ و $\frac{۵}{۴}$ منجر به وجود تعدادی بازه می‌شوند که مجموع طولشان دقیقاً برابر با ۱۹۸۸ است. نمی‌دانم کجا به این مسأله‌ها می‌رسند، ولی این یکی گوهری دوست داشتنی است.

پس از انجام انواع بررسیهای بیهوده، در نهایت بیشتر راغب شدم تا رفتار تابع $S(x) = \sum_{k=۱}^{۷۰} \frac{k}{x-k}$ را به کمک نمودار بررسی کنم؛ کاری که به‌نظرم بسیاری از شرکت‌کنندگان در مسابقه در وهلهٔ اول انجام داده‌اند. بدیهی است که این تابع در نقاط $x = k$، $k = ۱, ۲, \cdots, ۷۰$، ناپیوسته است ولی در بازه‌های باز بین این عددهای صحیح پیوسته است. همچنین وقتی‌که x از طرف چپ به k میل کند تابع به $-\infty$ و وقتی‌که x از طرف راست به k میل کند تابع به $+\infty$ میل می‌کند. بنابراین نمودار موردنظر خط $y = \frac{۵}{۴}$ را در هریک از بازه‌های $(k, k+۱)$، $k = ۱, ۲, \cdots, ۶۹$، قطع می‌کند. اگر $x > ۷۰$، بزرگترین جملهٔ $S(x)$، یعنی $\frac{۷۰}{x-۷۰}$، با بزرگ شدن x به‌طور نامحدودی کوچک و از اینجا معلوم می‌شود که قسمت مثبت محور xها مجانبی از نمودار این تابع است. بنابراین با رسم منحنی $y = S(x)$ معلوم می‌شود که مجموعهٔ xهایی که به‌ازای آنها $S(x) \geqslant \frac{۵}{۴}$ از ۷۰ بازهٔ نیمباز (که از طرف چپ باز و از طرف راست بسته‌اند) تشکیل می‌شود و این بازه‌ها به ترتیبی از نقاط $x = ۱, ۲, \ldots ۷۰$ آغاز می‌شوند.

درحقیقت، در نمودار $y = S(x) - \frac{5}{4}$، این بازه‌ها روی محور xها قرار دارند و به شکل $(k, x_k]$ هستند که در آن x_k ریشه‌ای از معادلهٔ $S(x) - \frac{5}{4} = 0$ است که بین k و $k + 1$ واقع است. بنابراین طول بازهٔ kام $x_k - k$ و مجموع طول همهٔ این ۷۰ بازه برابر است با

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \cdots + (x_{70} - 70)$$
$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_{70}) - (1 + 2 + \cdots + 70)$$



شکل۲۲

آنچه باقی مانده این است که ثابت کنیم مجموع ریشه‌های $S(x) - \frac{5}{4} = 0$ برابر با

$$1988 + (1 + 2 + \cdots + 70)$$

است. خوشبختانه این کار انجام محاسبه‌ای سرراست است، زیرا اگر $S(x) - \frac{5}{4} = ax^{70} + bx^{69} + \cdots$، آنگاه مجموع ریشه‌ها برابر با $-\frac{b}{a}$ است.

پس از ساده کردن کسرها در

$$S(x) - \frac{5}{4} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \cdots + \frac{70}{x-70} - \frac{5}{4} = 0$$

به‌دست می‌آوریم

$$4(x-2)(x-3)\cdots(x-70) + 4 \times 2(x-1)(x-3)\cdots(x-70)$$
$$+ \cdots + 4 \times 70(x-1)(x-2)\cdots(x-69) - 5(x-1)(x-2)\cdots(x-70) = 0$$
$$-5x^{70} + x^{69}[4 \times 1 + 4 \times 2 + \cdots + 4 \times 70 - 5(-1 - 2 - \cdots - 70)] + \cdots = 0$$
$$-5x^{70} + x^{69}[4(1 + 2 + \cdots + 70) + 5(1 + 2 + \cdots + 70)] + \cdots = 0$$
$$-5x^{70} + 9(1 + 2 + \cdots + 70)x^{69} + \cdots = 0$$

و مجموع ریشه‌ها برابر است با

$$\frac{۹(۱+۲+\cdots+۷۰)}{۵} = (۱+۲+\cdots+۷۰) + \frac{۴}{۵}(۱+۲+\cdots+۷۰)$$

$$= (۱+۲+\cdots+۷۰) + \frac{۴}{۵} \times \frac{۷۰ \times ۷۱}{۲}$$

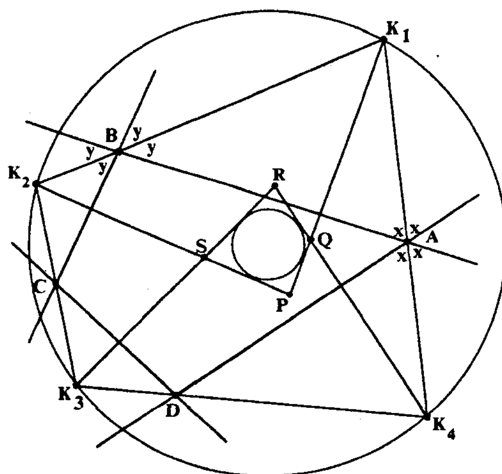
$$= (۱+۲+\cdots+۷۰) + ۲۸ \times ۷۱$$

$$= (۱+۲+\cdots+۷۰) + ۱۹۸۸$$

این همان چیزی است که می‌خواستیم.

مسألهٔ زیبایی از هندسه از دوان دوتامپل

نتیجهٔ زیبای این بخش دستاوردی از دوان دوتامپل از دانشگاه دولتی واشنگتن است.



شکل۲۳

مطابق شکل فرض کنید ضلعهای چهارضلعی محدب $ABCD$ را امتداد داده‌ایم و نیمسازهای زاویه‌های خارجی یکدیگر را در نقاط K_1، K_2، K_3 و K_4 قطع کرده‌اند. چون هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است، K_1 از سه ضلع AB، DA و CB به یک فاصله است، پس K_1 مرکز دایرهٔ محاطی بیرونی چهارضلعی است که بر پاره‌خط AB در یکی از نقاط درونی‌اش مماس است، و K_1، K_2، K_3 و K_4 روی‌هم چهار مرکز دایره‌های محاطی بیرونی $ABCD$ هستند. ثابت کنید $K_1K_2K_3K_4$ همواره چهارضلعیی محاطی است.

حال فرض کنید از هریک از K_iها عمودی بر ضلع نظیرش از $ABCD$ رسم شود؛ یعنی، از

K_1 عمودی بر AB، و از K_2 عمودی بر BC رسم شود و الی آخر، تا مطابق شکل ۲۴ از برخورد این خطوط چهارضلعی دیگری چون $PQRS$ پدید آید. این نتیجهٔ جالب توجه را ثابت کنید که همواره $PQRS$ دایرهٔ محاطی دارد و این دایره همواره با دایرهٔ محیطی $K_1K_2K_3K_4$ هم‌مرکز است.

راه‌حل

اثبات اینکه $K_1K_2K_3K_4$ همواره محاطی است چندان دشوار نیست. با توجه به شکل ۲۴، هر زاویه‌ای که با x مشخص شده برابر با نصف زاویهٔ خارجی در رأس A است، یعنی

$$x = \frac{1}{2}(180^\circ - A)$$

به همین ترتیب

$$y = \frac{1}{2}(180^\circ - B)$$

بنابراین z، اندازهٔ زاویهٔ K_1، برابر است با

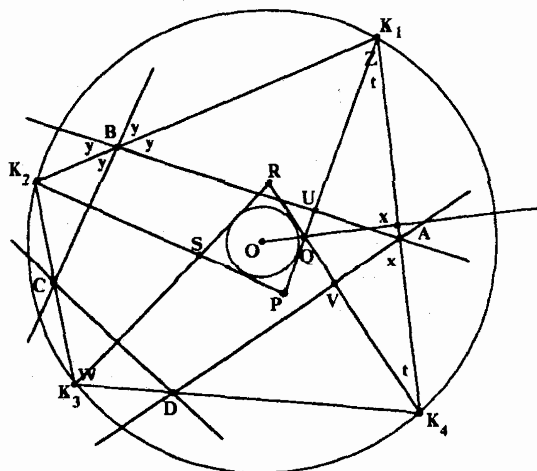
$$z = 180^\circ - x - y = \frac{1}{2}(A + B)$$

به همین ترتیب w، اندازهٔ زاویهٔ K_3، برابر است با

$$w = \frac{1}{2}(C + D)$$

و در نتیجه $K_1K_2K_3K_4$ محاطی است، زیرا

$$z + w = \frac{1}{2}(A + B + C + D) = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$$



شکل ۲۴

حال در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ K_1UA و K_4AV، زاویه‌ها در رأس A با هم برابرند و در نتیجه زاویه‌ها در رأسهای K_1 و K_4 نیز با هم برابرند. در نتیجه مثلث K_1K_4Q مثلثی متساوی‌الساقین و از این‌رو نیمساز $\angle Q$ در این مثلث عمودمنصف قاعدهٔ K_1K_4 است. ولی K_1K_4 وتری از دایرهٔ محیطی $K_1K_2K_3K_4$ است؛ پس این عمودمنصف از مرکز این دایره، O، می‌گذرد. به عبارت دیگر در چهارضلعی $PQRS$، OQ نیمساز $\angle Q$ است. به همین ترتیب OP، OR و OS نیمساز زاویه‌های دیگر $PQRS$ هستند، و در نتیجه O از چهارضلع به یک فاصله است.

پرفسور دوتامپل یادآور شده است که حالت خاصی هم وجود دارد، یعنی وقتی‌که $PQRS$ به یک نقطه تبدیل می‌شود و، احتمالاً همان‌طور که انتظار دارید، این نقطه همان مرکز دایرهٔ محیطی $K_1K_2K_3K_4$، نقطهٔ O، است. وی همچنین یادآور شده است که شکل $K_1K_2K_3K_4$ نسبت به شکل $ABCD$ نظم بهتری دارد:

۱) شکل $ABCD$ هرچه باشد، $K_1K_2K_3K_4$ محاطی است؛

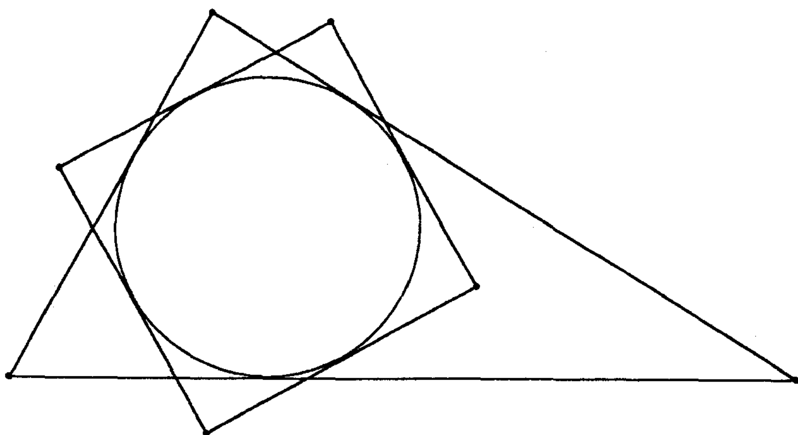
۲) وقتی‌که $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، $K_1K_2K_3K_4$ نه تنها متوازی‌الاضلاع است، بلکه مستطیل هم هست؛

۳) وقتی‌که $ABCD$ مستطیل است، $K_1K_2K_3K_4$ نه تنها مستطیل است، بلکه مربع هم هست.

مسأله‌ای از المپیاد کی‌یف

خوشم نمی‌آید وانمود کنم که سطح کلاس نهم در کی‌یف نظیر سال اول دبیرستان در امریکای شمالی است. در هر حال مسألهٔ جذاب زیر از المپیاد ۱۹۵۴ کی‌یف برای دانش‌آموزان کلاس نهم دبیرستان انتخاب شده است.

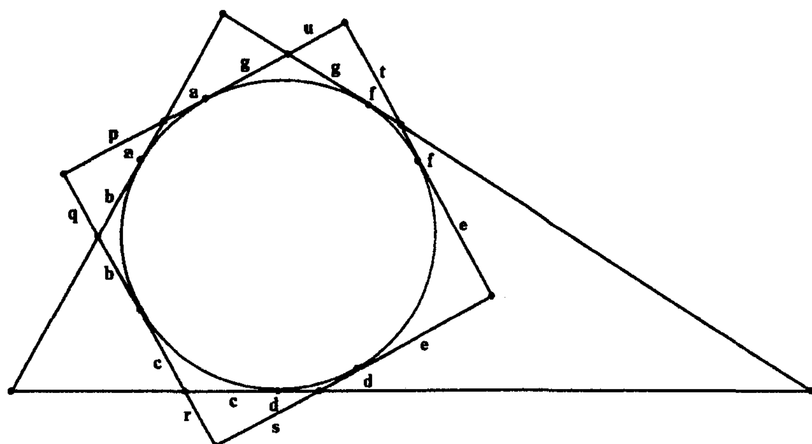
دایره‌ای در مثلث محاط و مربعی بر این دایره محیط شده است. ثابت کنید بیش از نصف محیط مربع درون یا روی مثلث قرار دارد.



شکل۲۵

راه‌حل

در حالت کلی، سه گوشه از مربع بیرون مثلث قرار می‌گیرد. فرض کنید طول ساقهای مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای که از گوشه‌های مربع جدا می‌شوند برابر با p، q، r، s، t، u و طول جفت مماسهای برابری که بر دایره رسم شده‌اند برابر با a، b، c، d، e، f و g باشد (به شکل ۲۶ نگاه کنید).



شکل۲۶

در این صورت اندازهٔ محیطی که درون مثلث قرار می‌گیرد برابر است با

$$(a+b)+(c+d)+(f+g)+۲e$$

که در آن e شعاع دایرهٔ محاطی است. همچنین محیطی که بیرون مثلث قرار می‌گیرد برابر است با

$$(p+q)+(r+s)+(t+u)$$

حال می‌دانیم که در مثلثهای قائم‌الزاویه رابطهٔ زیر برقرار است

قطر دایرهٔ محاطی = (طول وتر) − (مجموع طول ساقها)

با توجه به شکل ۲۷ درستی این رابطه معلوم است. بنابراین

$$(p+q)-(a+b)=d_۱$$

$$(r+s)-(c+d)=d_۲$$

$$(t+u)-(f+g)=d_۳$$

که در آنها $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ قطر دایره‌های محاطی نظیرشان در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ بیرون افتاده‌اند. بنابراین

$$(p+q)+(r+s)+(t+u)-[(a+b)+(c+d)+(f+g)]$$
$$=d_۱+d_۲+d_۳$$

اگر ۲e را از دو طرف این برابری کم کنیم نتیجه می‌شود

$$(p+q)+(r+s)+(t+u)-[(a+b)+(c+d)+(f+g)+۲e]$$
$$=d_۱+d_۲+d_۳-۲e$$

$$[(x + r) + (r + y)] - (x + y) = 2r$$

شکل۲۷

یعنی

$$\text{محیط بیرونی} - \text{محیط درونی} = d_1 + d_2 + d_3 - 2e$$

با ضرب کردن دو طرف در ۱− به‌دست می‌آید

$$\text{محیط درونی} - \text{محیط بیرونی} = 2e - (d_1 + d_2 + d_3)$$

تنها باقی مانده ثابت کنیم که این تفاضل مثبت است یا معادل آن

$$2e > d_1 + d_2 + d_3$$

بی‌تردید به‌دست آوردن اطلاعات مربوط به این قطرها به‌آسانی به‌دست نمی‌آید، مگر اینکه توجه کنید هریک از این مثلثهای کوچک در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی نشانده شده است که طول ساقهایش برابر با e، شعاع دایرهٔ محاطی، است. برای مثال مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیرید که طول ساقهایش برابرند با p و q (شکل ۲۸).

$$p + a = e,$$
$$q + b = e.$$

شکل۲۸

در این صورت بدیهی است که هریک از قطرهای $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ از قطر دایرهٔ محاطی چنین مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی، d، بزرگتر نیست. ولی d برابر است با

$$\begin{aligned} d &= (e+e) - e\sqrt{۲} \\ &= e(۲ - \sqrt{۲}) \\ &= e(۲ - ۱{,}۴۱۴۲\cdots) \\ &< e(۰{,}۶) \\ &= \frac{۳}{۵}e \end{aligned}$$

در نتیجه

$$d_۱ + d_۲ + d_۳ < \frac{۹}{۵}e < ۲e$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

چند مسألهٔ مورد علاقهٔ دانش‌آموزان

مسائل این بخش از مجموعهٔ مسائل گوناگونی با عنوان چهل مسألهٔ هیجان‌انگیز انتخاب شده‌اند و آنها را دو دانشجو یعنی فرانک دیپولیتو از دانشگاه واترلو و راوی وَکیل از دانشگاه تورنتو جمع‌آوری کرده‌اند.

مسألهٔ ۱

هریک از اعداد $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$ و x_n یا برابر با ۱+ است و یا برابر با ۱−. اگر

$$S = x_۱x_۲x_۳x_۴ + x_۲x_۳x_۴x_۵ + x_۳x_۴x_۵x_۶ + \cdots + x_nx_۱x_۲x_۳ = ۰$$

ثابت کنید n باید مضرب ۴ باشد.

راه‌حل

از آنجا که هریک از x_iها یا برابر با ۱+ است یا برابر با ۱−، هر جمله مانند $x_ax_{a+۱}x_{a+۲}x_{a+۳}$ نیز یا برابر با ۱+ است یا برابر با ۱−، و چون مجموع این جمله‌ها صفر است، تعداد جمله‌هایی که برابر با ۱+ هستند با تعداد جمله‌هایی که برابر با ۱− هستند برابرند؛ به عبارت دیگر از هرکدام $\frac{n}{۲}$ جمله وجود دارد.

فرض کنید p تا از x_iها برابر با ۱+ باشند. چون هریک از x_iها درچهار جمله مانند $x_ax_{a+۱}x_{a+۲}x_{a+۳}$ ظاهر می‌شود، عاملی چون x_i که برابر با ۱+ است درکل ۴p بار در مجموع S ظاهر می‌شود. هر جمله‌ای که برابر با ۱+ است تعداد زوجی از عاملهای ۱+ $= x_i$ و هر جمله‌ای که برابر با ۱− است تعداد فردی از آنها را در بر دارد. بنابراین روی‌هم رفته کل تعداد دفعاتی که عاملی برابر با ۱+ ظاهر می‌شود برابر است با

$$۴p = (\text{مجموعی از } \tfrac{n}{۲} \text{عدد صحیح زوج})$$
$$+(\text{مجموعی از } \tfrac{n}{۲} \text{ عدد صحیح فرد})$$

چون هر مجموعی از عددهای زوج و نیز ۴p زوج است نتیجه می‌شود که مجموع این $\frac{n}{۲}$ عدد صحیح

فرد هم باید زوج باشد. ولی مجموع گردایه‌ای از عددهای فرد تنها وقتی زوج است که تعداد آنها عددی زوج باشد. پس $\frac{n}{۲}$ باید زوج باشد و در نتیجه n مضرب ۴ است.

مسألهٔ ۲

فرض کنید $f(x) = x^n$ که در آن n عددی طبیعی و ثابت است و x در مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی، ۱، ۲، ۳، ⋯، تغییر می‌کند. با قرار دادن رقمهای $f(۱)$، $f(۲)$، ⋯، به‌دنبال هم، عدد اعشاری y_n را می‌سازیم:

$$y_n = ۰/\left(\underset{f(۱)}{\cdots\cdots\cdots}\right)\left(\underset{f(۲)}{\cdots\cdots\cdots}\right)\left(\underset{f(۳)}{\cdots\cdots\cdots}\right)\cdots$$

پس برای مثال

$$y_۲ = ۰/۱۴۹۱۶۲۵۳۶۴۹۶۴۸۱۰۰\cdots$$

و

$$y_۳ = ۰/۱۸۲۷۶۴۱۲۵۲۱۶۳۴۳۰\cdots\cdots$$

آیا به‌ازای مقداری از n، y_n عددی گویا می‌شود؟

راه‌حل

پاسخ این است «نه، y_nها همواره گنگ‌اند».

توانهای ۱۰ موجب می‌شوند که هر y_n شامل رشته‌های به‌اندازهٔ دلخواه طویلی از ۰ها باشد:

$$f(۱۰^k) = ۱۰^{kn} = ۱۰۰۰۰۰\ldots۰$$

ولی هیچ عدد گویای اعشاری شامل رشته‌های به‌اندازهٔ دلخواه طویلی از ۰ها نیست، مگر اینکه عدد اعشاری مختوم باشد. پس اگر y_n گویا باشد الزاماً مختوم است. ولی هر بار که مقدار x^nای را به رشته اضافه می‌کنیم، رقم غیرصفری در ابتدایش وجود دارد و در نتیجه y_n مختوم نیست.

مسألهٔ ۳

فرض کنید $a_۱ < a_۲ < \cdots a_{۴۳} < a_{۴۴}$ عددهای صحیحی باشند که از ۱۲۵ بیشتر نیستند. ثابت کنید که بین ۴۳ تفاضل متوالی $d_i = a_{i+۱} - a_i$ مقداری دست‌کم ۱۰ بار تکرار می‌شود.

راه‌حل

اگر $a_۱$ را در ابتدا بنویسیم، می‌توانیم هریک از a_iها را با افزودن تفاضلهای $d_۱$، $d_۲$، ⋯ و $d_{i-۱}$ به‌دست آوریم:

$$a_i = a_۱ + d_۱ + d_۲ + \cdots + d_{i-۱}$$

بنابراین

$$a_{۴۴} = a_۱ + d_۱ + d_۲ + \cdots + d_{۴۳}$$

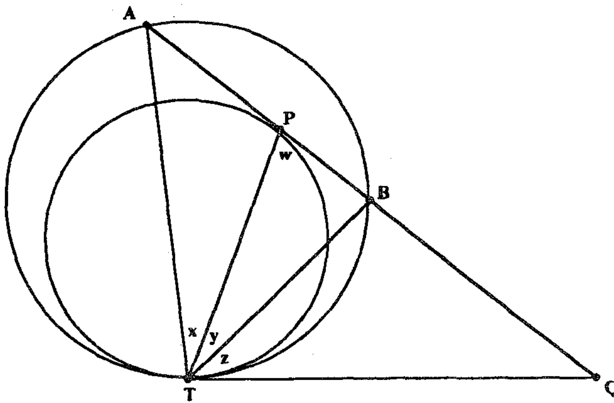
چون a_iها متمایزند، همیشه $d_i \geqslant ۱$. اینک اگر هیچ‌یک از d_iها ۱۰ بار تکرار نشود، آن‌وقت، به‌ویژه، اینکه $d_i = ۱$ و نیز $d_i = ۲, ۳, ۴$ بیش از ۹ بار پیش نمی‌آید. در نتیجه مجموع ۳۶ تا از کوچکترین d_iها دست‌کم برابر است با $۹(۱ + ۲ + ۳ + ۴) = ۹۰$. هفت d_iای که باقی می‌ماند باید دست‌کم برابر با ۵ باشند و

$$a_{۴۴} \geqslant a_۱ + ۹(۱ + ۲ + ۳ + ۴) + ۷(۵) = a_۱ + ۱۲۵ > ۱۲۵$$

در نتیجه $a_{۴۴}$ از حد ۱۲۵ می‌گذرد مگر اینکه یکی از d_iها دست‌کم ۱۰ بار تکرار شود.

مسألهٔ ۴

دو دایره در نقطهٔ T مماس درونی‌اند. وتر AB از دایرهٔ بیرونی در نقطهٔ P بر دایرهٔ درونی مماس است. ثابت کنید TP همواره نیمساز $\angle ATB$ است.



شکل۲۹

راه‌حل

فرض کنید امتداد AB مماس مشترک دایره‌ها را در Q قطع کند و زاویه‌های x، y، z و w مطابق شکل ۲۹ مشخص شده باشند. در این صورت QT و QP مماسهایی بر دایرهٔ درونی و با هم برابرند، و در نتیجه مثلث TQP متساوی‌الساقین است و

$$w = y + z$$

TQ مماس بر دایرهٔ بیرونی و TB وتر آن است. در نتیجه زاویهٔ بین آنها، z، با زاویهٔ محاطی واقع در طرف دیگر کمان برابر است، یعنی

$$z = \angle A$$

اینک زاویهٔ خارجی w در مثلث APT برابر با مجموع دو زاویهٔ درونی غیرمجاورش است و

$$w = x + \angle A = x + z$$

پس

$$w = y + z = x + z$$

و در نتیجه $z = y$ که همان نتیجهٔ مطلوب است.

مسألهٔ ۵

سه‌تایی (۲,۵,۱۳) از اعداد صحیح را در نظر بگیرید. در هر حالت، عددی که یک واحد کمتر از حاصل‌ضرب دو تا از این عددها باشد مربع کامل است:

$$۲(۵) - ۱ = ۹, \quad ۲(۱۳) - ۱ = ۲۵, \quad ۵(۱۳) - ۱ = ۶۴.$$

با وجود این، ثابت کنید که اگر عدد طبیعی جدیدی چون d به این سه‌تایی اضافه کنیم، دیگر چنین چیزی درست نیست. به عبارت دیگر به‌ازای هر عدد طبیعی مانند d، عددهایی که یک واحد کمتر از حاصل‌ضرب دو تا از عددهای چهارتایی $\{۲, ۵, ۱۳, d\}$ هستند همگی مربع کامل نیستند.

راه‌حل

چون به‌ازای هر انتخابی به‌جای a و b از سه‌تایی اولیهٔ $\{۲, ۵, ۱۳\}$، $ab - ۱$ مربع کامل است، فقط باید ثابت کنیم که به‌ازای هر d، یکی از عددهای

$$x = ۲d - ۱, \quad y = ۵d - ۱, \quad z = ۱۳d - ۱$$

مربع کامل نیست.

ردهٔ مانده‌ای d به‌پیمانهٔ ۴ را در نظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که هر مربع کامل به‌پیمانهٔ ۴ همواره با یکی از دو عدد ۰ و ۱ همنهشت است، زیرا $(۲a)^۲ = ۴a^۲$ و $(۲a + ۱)^۲ = ۴(a^۲ + a) + ۱$، و در نتیجه مجموع دو مربع کامل هیچ‌گاه به‌پیمانهٔ ۴ همنهشت ۳ نمی‌شود. چند حالت وجود دارد.

یک) $d \overset{۴}{\equiv} ۲$ یا ۰. در این حالت $x = ۲d - ۱ \overset{۴}{\equiv} ۳$، و x مربع کامل نیست.

دو) $d \overset{۴}{\equiv} ۳$. به‌طور مشابه نتیجه می‌شود $y = ۵d - ۱ \overset{۴}{\equiv} ۲$، و y مربع کامل نیست.

سه) $d \overset{۴}{\equiv} ۱$. در این حالت به‌ازای عدد درستی مانند k، $k \geqslant ۰$، $d = ۴k + ۱$، و در نتیجه

$$x = ۸k + ۱, \quad y = ۲۰k + ۴ = ۴(۵k + ۱), \quad z = ۵۲k + ۱۲ = ۴(۱۳k + ۳)$$

حال فرض می‌کنیم هر سه عدد x، y و z مربع کامل باشند و می‌کوشیم به تناقض برسیم.

اگر y، $y = ۴(۵k + ۱)$، مربع کامل باشد، به‌دلیل اینکه ضریب ۴ مربع کامل است، باید عامل $۵k + ۱$ نیز مربع کامل باشد. به همین ترتیب عامل $۱۳k + ۳$ نیز در عدد z باید مربع کامل باشد. بنابراین هریک از عددهای $۸k + ۱$، $۵k + ۱$ و $۱۳k + ۳$ باید مربع کامل باشد. از این‌رو اگر فرض کنیم

$$۸k + ۱ = a^۲,\ \ ۵k + ۱ = b^۲,\ \ ۱۳k + ۳ = c^۲$$

معلوم می‌شود که

$$a^۲ + b^۲ = c^۲ - ۱$$

اینک همان‌طور که در بالا گفتیم (به‌پیمانهٔ ۴) ۱ یا ۰ $\equiv c^۲$ و

$$a^۲ + b^۲ = c^۲ - ۱ \equiv ۳ \text{ یا } ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

از آنجا که هیچ‌گاه $a^۲ + b^۲$ به‌پیمانهٔ ۴ همنهشت ۳ نمی‌شود، نتیجه می‌گیریم

$$a^۲ + b^۲ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانه } ۴)$$

از آنجا که هریک از دو عدد $a^۲$ و $b^۲$ به‌پیمانهٔ ۴ یا همنهشت ۰ است یا همنهشت ۱، همنهشتی بالا زمانی درست است که

$$a^۲ \equiv b^۲ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

به عبارت دیگر $a^۲$ باید عددی زوج باشد. ولی روشن است که چنین نیست، زیرا $a^۲ = ۸k + ۱$.

مسألهٔ ۶

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geqslant ۲$، ثابت کنید

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{۲\pi}{n}\sin\frac{۳\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-۱)\pi}{n} = \frac{n}{۲^{n-۱}}$$

راه‌حل

n تا ریشهٔ $x^n = ۱$ عبارت‌اند از ۱، ω، $\omega^۲$، $\cdots$ و $\omega^{n-۱}$ که در آنها

$$\omega = \cos\frac{۲\pi}{n} + i\sin\frac{۲\pi}{n}$$

حال

$$x^n - ۱ = (x - ۱)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x + ۱)$$

چون عامل $x - ۱$ مربوط به ریشهٔ $x = ۱$ است، عامل مکملش باید مربوط به ریشه‌های دیگر باشد، و بنابراین تجزیهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x + ۱ = (x - \omega)(x - \omega^۲)\cdots(x - \omega^{n-۱})$$

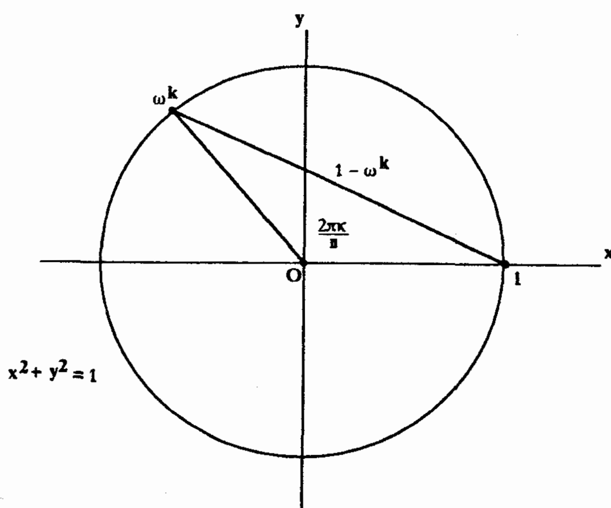
اگر در این اتحاد فرض کنیم $x = ۱$، نتیجه می‌شود

$$n = (۱ - \omega)(۱ - \omega^۲) \cdots (۱ - \omega^{n-۱})$$

و اگر قدرمطلق دو طرف این برابری را حساب کنیم به‌دست می‌آوریم

$$n = |۱ - \omega||۱ - \omega^۲| \cdots |۱ - \omega^{n-۱}| = \prod_{k=۱}^{n-۱} |۱ - \omega^k|$$

آنچه باقی مانده این است که ثابت کنیم $|۱ - \omega^k| = ۲ \sin \frac{\pi k}{n}$.



شکل ۳۰

در شکل ۳۰ مثلث برداری حاصل از بردارهای ۱، ω^k و $۱ - \omega^k$ در صفحهٔ مختلط نشان داده شده است. بنابر قانون کسینوسها اندازهٔ بردار $۱ - \omega^k$ از رابطهٔ زیر حساب می‌شود

$$\begin{aligned} |۱ - \omega^k|^۲ &= ۱^۲ + ۱^۲ - ۲ \cos \frac{۲\pi k}{n} \\ &= ۲ \left[۱ - \left(۱ - ۲ \sin^۲ \frac{\pi k}{n}\right)\right] = ۴ \sin^۲ \frac{\pi k}{n} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$|۱ - \omega^k| = ۲ \sin \frac{\pi k}{n}$$

که همان نتیجه مطلوب است و از اینجا رابطهٔ مطلوب فوراً به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۷

$(a_۱, a_۲, \cdots, a_n)$ جایگشتی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$ است. مقدار میانگین مجموع

$$S = (a_۱ - a_۲)^۲ + (a_۲ - a_۳)^۲ + \cdots + (a_{n-۱} - a_n)^۲$$

وقتی به‌ازای همهٔ $n!$ تا جایگشت حساب شود چقدر است؟

راه‌حل

فرض کنید (i, j) جفت مرتبی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ باشد. در این صورت $(n - ۲)!$ جایگشت وجود دارد که در آنها $a_۱ = i$ و $a_۲ = j$، و به این ترتیب $(n - ۲)!$ بار جملهٔ اول S برابر می‌شود با

$$(a_۱ - a_۲)^۲ = (i - j)^۲$$

و به این ترتیب جملهٔ $(n - ۲)!(i - j)^۲$ در مجموع $\sum S$، یعنی مجموع همهٔ $n!$ تا مقدار S، وجود دارد. همین جفت (i, j) به‌ازای هریک از $n - ۱$ جمله‌ای که به‌شکل $(a_k - a_{k+۱})^۲$ هستند به تعداد برابری در $\sum S$ وجود دارد، و مجموع آنها برابر است با

$$(n - ۱)(n - ۲)!(i - j)^۲ = (n - ۱)!(i - j)^۲$$

اگر روی همهٔ جفتهای مرتب جمع ببندیم، مجموع بزرگ $\sum S$ از رابطهٔ

$$\sum S = \sum_{(i,j)} (n - ۱)!(i - j)^۲$$

به‌دست می‌آید، زیرا هر جمله در هر S نظیر جفت مرتبی چون (i, j) است. در نتیجه

$$\begin{aligned}
A &= \frac{۱}{n!} \sum S = \frac{۱}{n} \sum_{(i,j)} (i - j)^۲ \\
&= \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} (i - j)^۲ = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} (i^۲ - ۲ij + j^۲) \\
&= \frac{۱}{n} \left[\sum_{i=۱}^{n} ni^۲ + \sum_{j=۱}^{n} nj^۲ - ۲ \left(\sum_{i=۱}^{n} i \right) \left(\sum_{j=۱}^{n} j \right) \right] \\
&= \frac{۱}{n} \left[۲n \times \frac{n(n + ۱)(۲n + ۱)}{۶} - ۲ \left[\frac{n(n + ۱)}{۲} \right]^۲ \right] \\
&= \frac{n(n + ۱)}{۶} [۲(۲n + ۱) - ۳(n + ۱)] \\
&= \frac{n(n + ۱)(n - ۱)}{۶} \\
&= \binom{n + ۱}{۳}
\end{aligned}$$

این پاسخ ترکیبیاتی جمع‌وجور انسان را به فکر می‌اندازد که آیا استدلال ترکیبیاتی خلاقانه‌ای وجود ندارد که این نتیجه را به‌سرعت و به‌آسانی به‌دست دهد؟

تمرینها

۱. اگر $a+b+c=۰$، رابطهٔ زیر را ثابت کنید

$$\frac{a^۵+b^۵+c^۵}{۵}=\left(\frac{a^۳+b^۳+c^۳}{۳}\right)\left(\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۲}\right)$$

۲. مجموع زیر را حساب کنید

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{k}{k^۴+k^۲+۱}$$

۳. الف) چندجمله‌ایی با ضریبهای صحیح بیابید که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ریشهٔ آن باشد.

ب) چندجمله‌ایی با ضریبهای صحیح بیابید که $\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۳}$ ریشهٔ آن باشد.

۴. ثابت کنید که اگر معادلهٔ $x^۳+y^۳+z^۳=۰$ جوابی در مجموعهٔ عددهای صحیح داشته باشد، آنگاه یکی از عددهای x، y و یا z باید مضربی از ۷ باشد.

چهار مسألهٔ استفاده نشده از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۸

۱. مسأله‌ای از بلغارستان

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۲۲۵)

فرض کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$a_۰ = ۰, \quad a_۱ = ۱, \quad a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}, \quad n \geqslant ۲$$

بنابراین دنباله به شکل زیر آغاز می‌شود

$$۰, ۱, ۲, ۵, ۱۲, ۲۹, ۷۰, ۱۶۹, ۴۰۸, ۹۸۵, ۲۳۷۸, ۵۷۴۱, ۱۳۸۶۰, \ldots$$

تا آنجا که از این نمونهٔ کوچک برمی‌آید نتیجه می‌گیریم

جمله‌هایی که یکی در میان، ابتدا از $a_۲$، آمده‌اند بر ۲ بخش‌پذیرند و اینها تنها جمله‌هایی هستند که بر ۲ بخش‌پذیرند؛

جمله‌هایی که سه تا در میان، ابتدا از $a_۴$، آمده‌اند بر ۴ بخش‌پذیرند و اینها تنها جمله‌هایی هستند که بر ۴ بخش‌پذیرند؛

جمله‌هایی که هفت تا در میان، ابتدا از $a_۸$، آمده‌اند بر ۸ بخش‌پذیرند و اینها تنها جمله‌هایی هستند که بر ۸ بخش‌پذیرند.

این ویژگی کلی را ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، a_n بر ۲^k بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر n بر ۲^k بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل

بعید می‌دانم طراحان این مسأله انتظار داشته‌اند شرکت‌کنندگان بتوانند راه‌حلی شبیه به رهیافت پیچیدهٔ زیر ابداع کنند، ولی به‌هر حال روش زیر برای حل این مسأله بسیار جالب است.

نخستین گام این است که دستوری برای جملهٔ عمومی، a_n، پیدا کنیم. می‌توانیم این کار را به‌روش معمول با استفاده از تابعهای مولد انجام دهیم، اما به‌جای این کار می‌توانیم به‌روش زیبای زیر عمل کنیم. اگر x ریشه‌ای از معادلهٔ

$$x^۲ = ۲x + ۱$$

باشد، می‌توانیم به کمک استقرا ثابت کنیم که به‌ازای هر n، $n \geqslant ۲$،

$$x^n = a_n x + a_{n-۱}$$

می‌دانیم که این رابطه به‌ازای $n = ۲$ برقرار است و اگر $x^{n-۱} = a_{n-۱}x + a_{n-۲}$، آنگاه

$$\begin{aligned} x^n = x \times x^{n-۱} &= a_{n-۱}x^۲ + a_{n-۲}x \\ &= a_{n-۱}(۲x + ۱) + a_{n-۲}x \\ &= (۲a_{n-۱} + a_{n-۲})x + a_{n-۱} \\ &= a_n x + a_{n-۱} \end{aligned}$$

حال ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ = ۲x + ۱$، یعنی ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$، عبارت‌اند از

$$\alpha = ۱ + \sqrt{۲}, \quad \beta = ۱ - \sqrt{۲}$$

توجه کنید که $\alpha\beta = -۱$. در نتیجه به‌ازای هر n، $n \geqslant ۲$،

$$\beta^n = a_n\beta + a_{n-۱}, \quad \alpha^n = a_n\alpha + a_{n-۱}$$

اگر این دو برابری را از هم کم کنیم نتیجه می‌شود

$$\alpha^n - \beta^n = a_n(\alpha - \beta)$$

و در نتیجه

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

بدیهی است که این برابری به‌ازای $n = ۰$ و $n = ۱$ نیز برقرار است.

اینک دنبالهٔ $\{b_n\}$ را این‌طور تعریف می‌کنیم: $b_۰ = ۲$ و به‌ازای هر n، $n \geqslant ۱$،

$$b_n = a_{n-۱} + a_{n+۱}$$

در این صورت

$$\{a_n\} = ۰, ۱, ۲, ۵, ۱۲, ۲۹, ۷۰, \cdots$$

و

$$\{b_n\} = ۲, ۲, ۶, ۱۴, ۳۴, ۸۲, \cdots$$

در نتیجه با توجه به دستور a_n دستوری برای b_n به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta}[(\alpha^{n+1} + \alpha^{n-1}) - (\beta^{n+1} + \beta^{n-1})] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^n\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \beta^n\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right] \end{aligned}$$

اکنون

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{\beta}{\alpha\beta} = \alpha - \beta$$

(به‌یاد آورید که $\alpha\beta = -1$) و

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \beta + \frac{\alpha}{\alpha\beta} = \beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$$

بنابراین b_n برابر است با

$$b_n = \alpha^n + \beta^n$$

با توجه به تجزیهٔ

$$a_{2n} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}(\alpha^n + \beta^n)$$

نتیجهٔ اساسی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$a_{2n} = a_n b_n$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که $\{b_n\}$ رابطهٔ بازگشتی زیر را از $\{a_n\}$ به ارث می‌برد

$$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$$

زیرا بنابر تعریف

$$2b_{n-1} = 2a_{n-2} + 2a_n$$

و

$$b_{n-2} = a_{n-3} + a_{n-1}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} 2b_{n-1} + b_{n-2} &= (2a_{n-2} + a_{n-3}) + (2a_n + a_{n-1}) \\ &= a_{n-1} + a_{n+1} = b_n \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که زوجیت b_{n-2} و b_n یکسان است، و چون b_1 و b_2 زوج‌اند (حتی b_0 هم زوج است)، نتیجه می‌شود که همواره b_n زوج است. اما از این رابطهٔ بازگشتی ویژگی مهم دیگری را نتیجه

می‌گیریم و آن اینکه همواره b_n برابر با دو برابر عددی فرد است. زیرا فرض کنید

$$b_{n-۲} = ۲d\,, \quad b_{n-۱} = ۲c$$

که در آنها c و d فردند. در این صورت

$$b_n = ۲b_{n-۱} + b_{n-۲} = ۴c + ۲d = ۲(۲c + d)$$

یعنی b_n هم دو برابر عددی فرد است. حال با توجه به اینکه $b_۰$ و $b_۱$ هر دو برابر ۱×۲ هستند، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

بنابراین در سمت راست برابری

$$a_{۲n} = a_n b_n$$

عامل b_n همواره دقیقاً یک عامل ۲ ایجاد می‌کند.

اینک اگر به $\{a_n\}$ بازگردیم، می‌توانیم به‌روشی مشابه نتیجه بگیریم که a_n زوج است اگر و تنها اگر n زوج باشد، زیرا با توجه به برابری $a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}$، نتیجه می‌گیریم که زوجیت a_n و $a_{n-۲}$ یکسان است، و چون $a_۰$ زوج است، به‌ازای هر n، $a_{۲n}$ نیز زوج است و چون $a_۱$ فرد است، به‌ازای هر n، $a_{۲n+۱}$ فرد است. بنابراین ویژگی مطلوب یعنی « ۲^k، a_n را می‌شمارد اگر و تنها اگر ۲^k، n را بشمارد» به‌ازای $k = ۱$ برقرار است. کار را به استقرا ادامه می‌دهیم. فرض کنید به‌ازای kای، $k \geqslant ۲$، $۲^{k-۱}$، a_n را می‌شمارد اگر و تنها اگر $۲^{k-۱}$، n را بشمارد. اکنون $۲^{k-۱}$، a_n را نمی‌شمارد مگر اینکه a_n زوج باشد، و همان‌طور که گفتیم در این صورت n باید زوج باشد. بی‌تردید هنگامی‌که n بر $۲^{k-۱}$ بخش‌پذیر باشد عددی زوج است. بنابراین در بحث زیر همواره n زوج است و مثلاً $n = ۲t$.

همان‌طور که گفتیم در سمت راست برابریهای

$$a_n = a_{۲t} = a_t b_t$$

b_t فقط یک عامل ۲ ایجاد می‌کند. در این صورت نتیجه می‌شود که ۲^k، a_n را می‌شمارد اگر و تنها اگر $۲^{k-۱}$، a_t را بشمارد.

ولی بنابر فرض استقرا $۲^{k-۱}$، a_t را می‌شمارد اگر و تنها اگر $۲^{k-۱}$ خود t را بشمارد، یعنی $۲^{k-۱}$، $\frac{n}{۲}$ را بشمارد، یا معادلاً ۲^k، n را بشمارد. در نتیجه به استقرا نتیجه می‌شود که ۲^k، a_n را می‌شمارد اگر و تنها اگر ۲^k، n را بشمارد.

۲. مسأله‌ای از آلمان شرقی

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۲۵۷)

قفل گاوصندوقی از سه چرخ A، B و C تشکیل شده است و هریک از آنها را می‌توان در هشت وضعیت مختلف قرار داد. به‌دلیل بروز نقص فنی در ساختمان قفل، هنگامی‌که دو تا از چرخها در وضعیت

درست قرار گیرند، درِ گاوصندوق باز می‌شود. بنابراین هر کسی می‌تواند با ۶۴ بار آزمایش درِ گاوصندوق را باز کند (به‌سادگی می‌توان در ازای هریک از ۸ حالت ممکن A هشت حالت ممکن B را امتحان کرد). با وجود این همواره می‌توانیم با انجام دادن تعداد دفعات بسیار کمتری آزمایش این کار را انجام دهیم. کمترین تعداد آزمایشهایی که پس از انجام دادن آنها گاوصندوق حتماً باز شده است چیست؟

راه‌حل

(این راه‌حل از همکارم پال شِلِنبرگ است.)

اگر (a, b, c) ترکیب درست چرخهای A، B و C باشد، هر آزمایشی که به یکی از جفتهای مرتب $(A, B) = (a, b)$، $(B, C) = (b, c)$ و $(C, A) = (c, a)$ بینجامد گاوصندوق را می‌گشاید. بنابراین باید طرحی ابداع کنیم که هر سه جفت مرتب را همزمان آزمایش کند. در حقیقت در هر آزمایش مانند (A, B, C) سه جفت (A, B)، (A, C) و (B, C) نیز بررسی می‌شوند و با انجام این کار امکان رسیدن به یکی از جفتهای کلیدی در کمترین تعداد گامهای ممکن تضمین می‌شود.

نخست توجه کنید که چون ترکیب (a, b, c) شامل سه عدد است از اصل لانه‌کبوتری نتیجه می‌شود که یا

یک) دو تا از این عددها در مجموعهٔ (۱, ۲, ۳, ۴) هستند؛ و یا

دو) دو تا از این عددها در مجموعهٔ (۵, ۶, ۷, ۸) هستند.

موقتاً توجه خود را به آزمایش ۱۶ = ۴۲ جفت مرتب حاصل از مجموعهٔ (۱, ۲, ۳, ۴) یعنی جفتهای

$$(۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), \cdots, (۴, ۴)$$

معطوف می‌کنیم. هریک از این جفتهای مرتب را باید در سه وضعیت مختلف آزمایش کرد که در نتیجه مجموعاً ۴۸ = ۱۶ × ۳ آزمایش باید انجام داد. می‌توانیم بپذیریم که این کار فقط در ۱۶ آزمایش انجام شود، به شرط اینکه بتوانیم جفتها را در سه‌تاییهایی مانند (A, B, C) طوری قرار دهیم که هر جفت مرتب مانند (x, y) یک بار به‌شکل (A, B)، یک بار به‌شکل (B, C) و یک بار به‌شکل (C, A) ظاهر شود. بنابراین حل کامل این مسأله آرایه‌ای ۱۶ × ۳ است که ۱۶ آزمایشی را مشخص می‌کند که در آنها هریک از جفتهای مرتب دقیقاً یک بار در هر جفت از سطرهای (A, B)، (B, C) و (C, A) ظاهر شود.

A	۱		$\cdots$	−	$\cdots$	۲
B	۲		$\cdots$	۱	$\cdots$	−
C	−		$\cdots$	۲	$\cdots$	۱

به‌نظر می‌رسد که ترتیب دادن چنین جدولی کار بسیار ساده‌ای است.

از آنجا که می‌خواهیم عددهای (۱, ۲, ۳, ۴) کاملاً مخلوط باشند، کار را با ساختن آرایه‌ای ۴ × ۴ (یا همان مربع لاتین ۴ × ۴) آغاز می‌کنیم که در آن هر سطر و هر ستون یکی از ۲۴ = !۴

جایگشت عددهای (۱, ۲, ۳, ۴) است. روشهای مختلفی برای انجام این کار وجود دارد. مثلاً از انتقالی سطربه‌سطر به‌دست می‌آوریم

۱ ۲ ۳ ۴
۴ ۱ ۲ ۳
۳ ۴ ۱ ۲
۲ ۳ ۴ ۱

اینک می‌توانیم جفت مرتبی مانند (x, y) را مختصات حجره‌ای در این آرایه در نظر بگیریم:

حجرهٔ (x, y) در سطر xام و ستون yام قرار دارد

بنابراین می‌توانیم هریک از ۱۶ جفت مرتب مانند (x, y) را با الصاق عدد واقع در حجرهٔ (x, y) به آن به سه‌تایی مرتب (x, y, z) تبدیل می‌کنیم. برای مثال

(۲, ۳) → (۲, ۳, ۲),   (۴, ۲) → (۴, ۲, ۳)

با مرتب کردن سه‌تاییهای حاصل به‌صورت ستونی، ۱۶ سه‌تایی مطلوب مانند (A, B, C) به‌دست می‌آوریم (چنین آرایه‌ای را آرایه‌ای متعامد نیز می‌نامند):

A	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۳	۳	۳	۳	۴	۴	۴	۴
B	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
C	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱

به‌آسانی می‌توانید مستقیماً بررسی کنید که در هر جفت از سطرها هر جفت مرتب دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

بنابراین اگر دو عدد از ترکیب (a, b, c) به مجموعهٔ (۱, ۲, ۳, ۴) تعلق داشته باشند، با یکی از ۱۶ آزمایش بالا می‌توان درگاوصندوق را بازکرد. در غیر این صورت دو تا از عددهای (a, b, c) به مجموعهٔ (۵, ۶, ۷, ۸) تعلق دارند و در این صورت با آزمایشی در آرایهٔ ۱۶ × ۳ مربوط به این عددها می‌توان درگاوصندوق را بازکرد. آرایهٔ دوم با افزودن عدد ۴ به هریک از اعضای آرایهٔ مربوط به (۱, ۲, ۳, ۴) به‌دست می‌آید. بنابراین گاوصندوق با ۳۲ آزمایش یا کمتر از آن باز می‌شود.

برای اینکه ثابت کنیم ۳۲ کوچکترین عدد موردنظر است، باید ثابت کنید ۳۱ آزمایش اولیه هر چه باشد، ترکیبی چون (a, b, c) وجود دارد که به‌طور کامل فراموش شده است، یعنی هیچ‌یک از جفتهای (a, b)، (b, c) یا (c, a) آزمایش نشده است. برای این کار، کوششهایمان را در آرایه‌ای ۸ × ۸ مانند R دنبال می‌کنیم؛ به این ترتیب که عدد c مربوط به آزمایش (a, b, c) را در حجره‌ای با مختصات (a, b)، یعنی حجرهٔ واقع در سطر aام و ستون bام، قرار می‌دهیم. به این ترتیب اگر عدد واقع در حجرهٔ واقع در سطر دوم و ستون پنجم ۶ باشد، نتیجه می‌گیریم که یکی از آزمایشهای ما ترکیب (۲, ۵, ۶) بوده است. توجه می‌کنیم که اگر آنقدر مسرف بوده‌ایم که ترکیب (۲, ۵, ۳) را نیز آزمایش کرده بوده‌ایم، آنگاه عدد ۳

نیز به‌همراه عدد ۶ وارد حجرهٔ (۲,۵) می‌شود. اینک فرض کنید که ۳۱ آزمایش را در آرایهٔ R ثبت کرده باشیم. در این صورت لزوماً یکی از چهار حالت زیر رخ می‌دهد.

یک) فرض کنید یکی از سطرها یا یکی از ستونها دقیقاً شامل دو درایه باشد. برای روشنی وضع فرض کنید سطر سوم فقط شامل عددهای ۴ و ۷ است (شکل ۳۱ را ببینید). ممکن است این عددها در یک حجره باشند ولی در هر صورت دست‌کم شش ستون وجود دارد که درایهٔ مشترکی با سطر سوم ندارند. اینک، هیچ‌یک از این شش ستون شامل ۵ درایه نیست، زیرا در غیر این صورت نیاز به ۳۰ = ۵ × ۶ درایه داریم درحالی‌که تنها ۲۹ آزمایش دیگر در R ثبت شده است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که یکی از این ستونها بیش از ۴ درایه ندارد. مطابق شکل، فرض کنید ستون هفتم فقط درایه‌های ۸، ۱، ۳ و ۵ را داشته باشد. در این صورت درایه‌های سطر سوم و ستون هفتم روی‌هم ۶ تا از ۸ عدد (۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸)، یعنی عددهای {۴,۷,۸,۱,۳,۵}، را دربردارند و عدد (۶ و ۲) هیچ جایی در سطر سوم یا ستون هفتم ظاهر نمی‌شود. بنابراین اگر ترکیب درست (۳,۷,۶) باشد، در آزمایشهای ما به‌طور کامل نادیده گرفته شده است:

- اگر ترکیبی مانند $(۳,۷,c)$ را آزمایش کرده باشیم، عدد c باید در حجرهٔ (۳,۷) قرار می‌گرفت؛ ولی حجرهٔ (۳,۷) خالی است.
- اگر ترکیبی مانند $(۳,b,۶)$ را آزمایش کرده باشیم، عدد ۶ باید جایی در سطر سوم (و در ستون bام) قرار می‌گرفت که چنین نیست.
- اگر ترکیبی مانند $(a,۷,۶)$ را آزمایش کرده باشیم، عدد ۶ باید جایی در ستون هفتم قرار می‌گرفت که چنین نیست.

ستون هفتم

سطر سوم

	4			7			

ستون هفتم (از بالا به پایین): 8، 1، 3، 5

شکل۳۱

با کوششی مشابه بالا، می‌توان همین استدلال را در حالتهایی که یکی از سطرها یا یکی از ستونها دقیقاً شامل یک درایه است یا اصلاً درایه‌ای ندارد به‌کار برد. از آنجاکه برای قرار دادن ۴ عدد در هریک از ۸ سطر R نیاز به انجام ۳۲ آزمایش داریم، در نتیجهٔ ۳۱ کوششی که انجام داده‌ایم یکی از سطرها حداکثر ۳ درایه دارد. بنابراین باید فقط حالتی را در نظر بگیریم که یکی از سطرها دقیقاً شامل۳ درایه است.

دو) مطابق شکل ۳۲ فرض کنید که سطر اول شامل ۳ درایه در ستونهای اول، دوم و سوم باشد. اگر یکی از این سه ستون یا دقیقاً شامل یک درایه بود یا دقیقاً شامل دو درایه، ادعای ما بر اساس یکی از حالتهای قبل درست از آب درمی‌آمد. اینک فرض کنید که هریک از این ستونها دست‌کم شامل ۳ درایه باشد که در این صورت مجموع درایه‌های این ستونها روی‌هم دست‌کم برابر با ۹ می‌شود. در نتیجه، هیچ‌یک از ۵ ستون دیگر شامل ۵ درایه نیست، زیرا در غیر این صورت تنها ۲۲ آزمایش یا کمتر از آن در آنها ثبت شده است. پس یکی از این ستونهای دیگر باید شامل ۴ درایه یا کمتر از آن باشد و در نتیجه مانند بالا حکم ثابت می‌شود.

اگر از ۳درایهٔ سطر اول ۲ تا یا بیشتر از ۲ تا در یک حجره باشند، استدلال ما به‌ترتیب زیر تقویت می‌شود:

وجود ۳ درایه در یک حجره موجب می‌شود که در ۷ ستون دیگر بیش از ۲۸ درایه وجود نداشته باشد. وجود ۳ درایه در دو حجره موجب می‌شود که در دو ستون مربوط به آنها دست‌کم ۶ درایه وجود داشته باشد و به این ترتیب برای پرکردن ۶ ستون دیگر بیش از ۲۵ درایه باقی نمی‌ماند؛ در هر حال، یکی از ستونهای دیگر نباید بیش از ۴ درایه داشته باشد و این ستون و سطر اول همهٔ ۸ عدد را ندارند.

بنابراین در هر دنباله‌ای متشکل از ۳۱ آزمایش برای بازکردن گاوصندوق همواره دست‌کم یک ترکیب باقی می‌ماند که آزمایش نشده است. از اینجا نتیجه می‌شود که کمترین تعداد آزمایش لازم ۳۲ تاست.

شکل۳۲

۳. مسأله‌ای که طراحش مشخص نیست

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۲۶۰)

فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های دودویی به‌طول ۷ باشد:

$$S = \{۰۰۰۰۰۰۰, ۰۰۰۰۰۰۱, \cdots, ۱۱۱۱۱۱۱\}$$

فرض کنید تعداد مکانهایی را که در آنها دو دنباله با هم فرق دارند فاصلهٔ بین آنها بنامیم و T زیرمجموعه‌ای از S باشد که فاصلهٔ هر دو عضوش برابر با ۳ است.

ثابت کنید T بیش از ۱۶ عضو ندارد و زیرمجموعه‌ای ۱۶ عضوی مانند T بسازید.

راه‌حل

بدیهی است که به‌ازای هر دنبالهٔ مفروض مانند A، ۷ دنباله وجود دارد که دقیقاً در یک مکان با A تفاوت دارند. برای مثال ۷ دنباله‌ای که به فاصلهٔ یک از $A = ۰۰۰۰۰۰۰$ قرار دارند عبارت‌اند از ۱۰۰۰۰۰۰، ۰۱۰۰۰۰۰، ۰۰۱۰۰۰۰، ۰۰۰۱۰۰۰، ۰۰۰۰۱۰۰، ۰۰۰۰۰۱۰ و ۰۰۰۰۰۰۱. به این ترتیب می‌توانیم دنباله‌های S را در زیرمجموعه‌هایی ۸ عضوی متشکل از دنباله‌ای مانند A و ۷ دنبالهٔ وابستهٔ آن که فاصله‌شان از آن ۱ است مرتب کنیم؛ این زیرمجموعهٔ وابسته به A را با $\overline{A}$ نشان می‌دهیم.

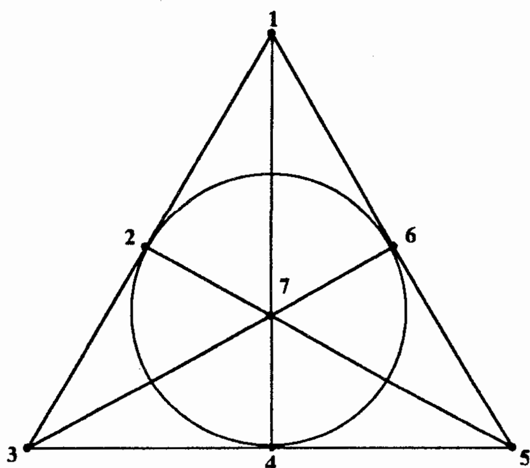
فرض کنید T، n عضو مانند $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_n داشته باشد و $\overline{A}_۱$، $\overline{A}_۲$، $\cdots$ و $\overline{A}_n$ زیرمجموعه‌های وابسته به آنها باشند. به‌آسانی معلوم می‌شود که هیچ دوتایی از این زیرمجموعه‌ها عضو مشترک ندارند، زیرا اگر دنبالهٔ B به هردو $\overline{A}_i$ و $\overline{A}_j$ تعلق داشته باشد، آنگاه فاصلهٔ بین $\overline{A}_i$ و $\overline{A}_j$ بیش از ۲ نیست، و این‌هم با تعریف T تناقض دارد. در این حالت

> حداکثر با تغییر یکی از مکانها در A_i به B می‌رسیم (ممکن است B خود A_i باشد) و حداکثر با تغییر یکی از مکانها در B به A_j می‌رسیم.

بنابراین n عضو T مجموعاً به $۸n$ دنبالهٔ مختلف در S وابسته‌اند. چون کل تعداد عضوهای S برابر با $۱۲۸ = ۲^۷$ است، بنابراین $۸n \leqslant ۱۲۸$ و در نتیجه $n \leqslant ۱۶$.

این نتیجه جواب بخش ساده‌ای از پرسش است. اما اینکه چگونه می‌توانیم زیرمجموعه‌ای ۱۶ عضوی مانند T بسازیم به هیچ‌وجه ساده نیست. در حقیقت بسیار ممکن است در همان کوششهای اولیه سردرگم و ناامید شویم.

با وجود این، این مسأله موضوع اوایل نظریهٔ کدگذاری است و می‌توان آن‌را با استفاده از صفحهٔ فانو به‌زیبایی حل کرد (شکل ۳۳ را ببینید). فرض کنید جای ۷ مکان موجود در دنباله‌های عضو S را با عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ ، ۵، ۶ و ۷ نشان دهیم. خطوط این شکل (که یکی از آنها، یعنی ۲۴۶، منحنی است)، نشان می‌دهند که چگونه می‌توان با استفاده از ۰۰۰۰۰۰۰ مجموعه‌ای از ۷ دنباله ساخت



شکل۳۳

به‌طوری‌که فاصلهٔ همهٔ آنها از ۰۰۰۰۰۰۰ برابر با ۳ و فاصلهٔ آنها از یکدیگر برابر با ۴ باشد. هریک از این خطوط شامل سه تا از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ است و همهٔ آنچه که باید انجام دهیم این است که در مکانهای مربوط به این سه عدد ۱ و در مکانهای دیگر ۰ بگذاریم:

X

۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰

بنابراین این مجموعه، X، ۸ عضو زیرمجموعهٔ T مطلوب را تأمین می‌کند. در مورد ۸ عضو باقی ماندهٔ T می‌توانیم از متممهای اینها، یعنی دنباله‌هایی که از تعویض ۰ها با ۱ها به‌دست می‌آیند، استفاده کنیم.

Y

۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱

بنابراین فاصلهٔ بین دو عضو Y یا برابر با ۳ است یا برابر با ۴، و همین‌طور فاصلهٔ بین پیشینیان آنها نیز یا برابر با ۳ است یا برابر با ۴. تنها پرسشی که باقی مانده این است که آیا ممکن است فاصلهٔ عضوی از X و عضوی از Y کمتر از ۳ باشد؟ به‌نظر می‌رسد که برای پاسخ دادن به این پرسش راهی به‌غیر از بررسی حالتهای مستقیم بسیار وجود ندارد و شاید ترجیح دهید که هر عضو X را با هر عضو Y مقایسه و کار را تمام کنید. با وجود این چنین بررسیهایی را می‌توان به‌صورت زیر و به‌زیبایی انجام داد.

جفت متمم $P = ۰۰۰۰۰۰۰$ و $P' = ۱۱۱۱۱۱۱$ کاملاً جدا از هم‌اند. از آنجا که هر عضو Y دست‌کم ۴ تا ۱ دارد، فاصلهٔ P از هر عضو Y دست‌کم ۴ است. به همین ترتیب فاصلهٔ P' از هر عضو X دست‌کم ۴ است. همچنین فاصلهٔ هر دنباله از متممش ۷ است. پس آنچه که باقی‌مانده بررسی فاصلهٔ عضوی مانند A از $\{X - P\}$ و دنباله‌ای چون B' از $\{Y - P'\}$ است که متمم A نیست.

از بررسی مستقیم معلوم می‌شود که فاصلهٔ A و هر عضوی از دستهٔ خودش، $\{X - P\}$، ۴ است. به عبارت دیگر دو عضو $\{X - P\}$ دقیقاً در سه مکان مطابق هم و در ۴ مکان متفاوت‌اند. به همین ترتیب در مورد هر دو عضو $\{Y - P'\}$ نیز چنین حکمی درست است. اینک A'، متمم A، را در نظر بگیرید. A' متعلق به Y است و هم‌اکنون گفتیم که B' و A' دقیقاً در سه مکان مانند u، v و w مطابقت دارند. از آنجا که باید همهٔ مکانهای A' را معکوس کنیم تا به A برسیم، A باید دقیقاً در همان سه مکان u، v و w با B' متفاوت باشد و به این ترتیب راه‌حل مسأله تمام می‌شود.

$$\begin{array}{ll} X & Y \\ A: \cdots u'v'w' & A': \cdots uvw \\ & B': \cdots uvw \end{array}$$

۴. مسأله‌ای از امریکا

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۲۵۶)

تعدادی چراغ علامت‌دهنده به فاصله‌های مساوی از یکدیگر در امتداد مسیر خط‌آهن یک‌طرفه‌ای قرار دارند و به‌ترتیب با عددهای ۰، ۱، ۲، $\cdots$ و n، $n \geqslant ۲$، شماره‌گذاری شده‌اند. مطابق قانون هیچ قطاری مجاز نیست از جلو چراغی بگذرد که بین آن چراغ و چراغ بعد از آن قطار دیگری در حرکت است. با وجود این، در مورد تعداد قطارهایی که می‌توانند بی‌حرکت و پشت سر هم در مقابل چراغی توقف کنند تا نوبت عبورشان از بخش بعدی مسیر برسد محدودیتی وجود ندارد (قطارها را نقطه فرض کرده‌ایم و طولشان صفر است).

چند قطار باری باید از چراغ ۰ تا چراغ n رانده شوند. هر قطار مادامی‌که مطابق قانون متوقف نشده است همواره با سرعتی ثابت ولی متفاوت از بقیه حرکت می‌کند. ثابت کنید ترتیب قرار گرفتن قطارها هر طور که باشد، فاصلهٔ زمانی بین حرکت قطار اول از چراغ ۰ تا رسیدن قطار آخر به چراغ n مقداری یکسان است.

راه‌حل

همان‌طور که در شکل ۳۴ نشان داده شده است می‌توانیم پیشروی قطارها را به‌خوبی در نمودار زمان ـ مسافت رسم کنیم. در این جدول چراغها به فاصله‌های مساوی روی محور yها مشخص شده‌اند و زمان روی محور xها مشخص شده است. از آنجا که سرعت هر قطار ثابت است، می‌توان پیشروی آن‌را در فاصلهٔ بین دو چراغ متوالی با پاره‌خط مشخص کرد. هرچه شیب این پاره‌خط تندتر باشد سرعت قطار بیشتر است. بدیهی است که قطار اول هیچ‌گاه متوقف نمی‌شود و همهٔ قسمتها را بدون توقف طی می‌کند. ولی مسیر قطارهای بعدی را می‌توان به‌خوبی با مسیری زیگزاگ مانند مشخص کرد که در آن هر قسمت موازی محور xها زمان توقف قطار برای آزاد شدن عبورش از قسمت بعدی را نشان می‌دهد. در حقیقت کلید حل مسأله این است که کندروترین قطار هر جا که در مجموعهٔ قطارها قرار داشته باشد هیچ‌گاه پشت چراغی متوقف نمی‌شود. درواقع این مطلب نتیجه‌ای فوری از حکم کلی زیر است:

قطاری که از قطارهای پیش از خودش کندتر حرکت می‌کند هرگز پشت چراغی متوقف نمی‌شود.

کار را به استقرا انجام می‌دهیم.

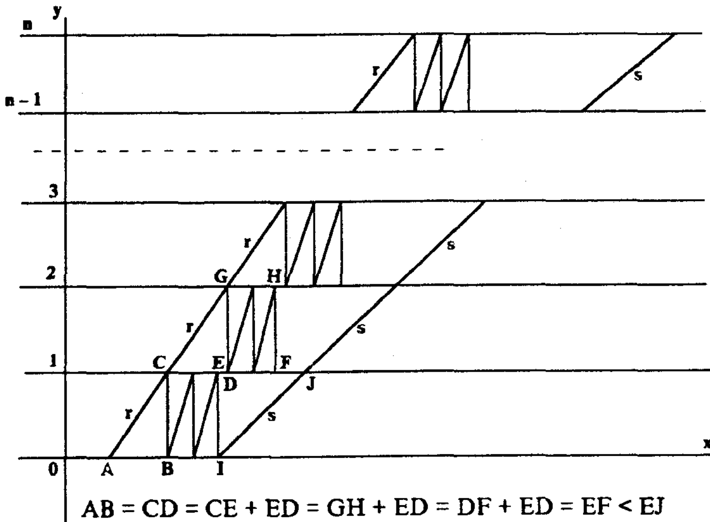
همان‌طور که گفتیم اولین قطار هرگز متوقف نمی‌شود و در نتیجه وقتی‌که $r = ۱$ حکم در مورد قطار rام درست است. فرض کنید به‌ازای rای، $r \geqslant ۱$، قطار rام هرگز متوقف نشود و در نتیجه خطی راست در عرض نمودار رسم شود. همچنین فرض کنید کندروترین قطار بعد از قطار rام قطار sام باشد. حال همان‌طور که از شکل معلوم است ممکن است چند قطار بین این دو قطار وجود داشته باشد. از آنجا که قطار sام کندروترین قطار بعد از قطار rام است، همهٔ قطارهایی که بین آنها قرار دارند از قطار rام سریعتر حرکت می‌کنند. در این حالت نمودارهای مربوط به قطارهای r، $r + ۱$، $r + ۲$، $\cdots$ تا قطار sام، ولی نه خود آن، شکلی می‌سازند که در آن قطعه‌های بین چراغهای متوالی همگی شبیه به‌هم‌اند. این قطعه‌ها درست مانند قطعهٔ بین نقطهٔ شروع و تراز اول‌اند که در هر تراز تکرار شده است. بنابراین، برای مثال، در شکل ۳۴ پاره‌خط GH در تراز ۲ با پاره‌خط CE در تراز اول برابر است. از آنجا که GH با DF در تراز ۱ نیز برابر است، نتیجه می‌شود

$$CD = CE + ED = GH + ED = DF + ED = EF$$

بنابراین در شکل ۳۴ به‌سادگی می‌توانیم نتیجه بگیریم که $AB = CD = EF$. (به محاسبات زیر شکل ۳۴ توجه کنید.)

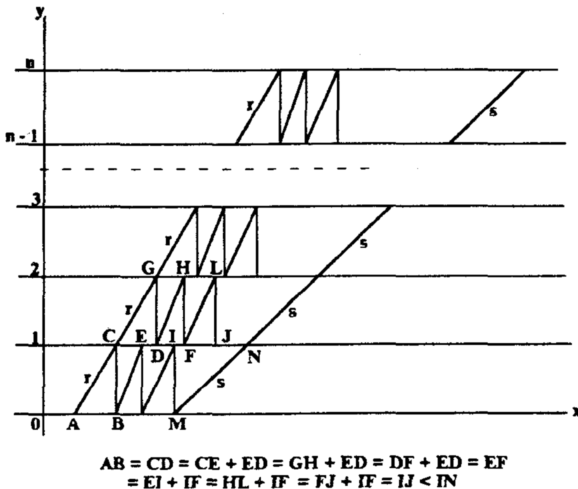
حال قطار s آهسته‌تر از قطار r حرکت می‌کند و در نتیجه مکان‌هندسی آن در قسمتی از مسیر پاره‌خطی است که شیب آن از شیب AC که مساوی با شیب IF مربوط به قطار r است کمتر است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که مکان‌هندسی s باید از تراز ۱ در نقطه‌ای مانند J عبور کند که بعد از زمان F قرار دارد و این یعنی اینکه قطار s در تراز ۱ متوقف نشده است و بنابراین در هیچ تراز بعد از آن نیز متوقف نمی‌شود.

چون شکل ۳۴ نسبتاً جامع نیست، وضعیت نوعی دیگری در شکل ۳۵ نشان داده شده است که بازهم به همان نتیجهٔ قبلی می‌انجامد، زیرا همان‌طور که در زیرنویس شکل استدلال شده است $AB = IJ < IN$.



$AB = CD = CE + ED = GH + ED = DF + ED = EF < EJ$

شکل۳۴



$AB = CD = CE + ED = GH + ED = DF + ED = EF$
$= EI + IF = HL + IF = FJ + IF = IJ < IN$

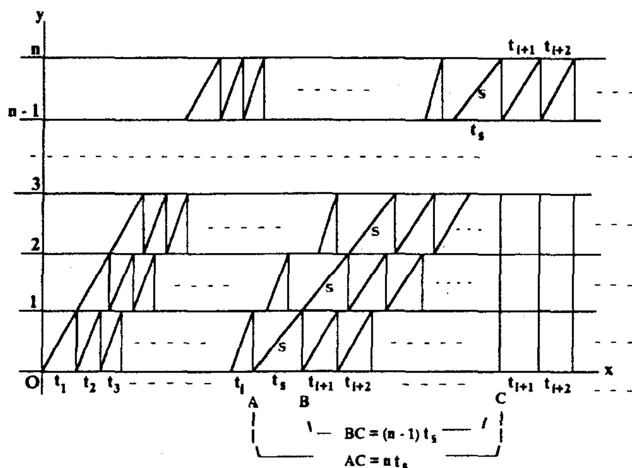
شکل۳۵

برای اینکه راه‌حل را کامل کنیم فرض کنید k قطار به‌ترتیب دلخواهی قرارگرفته‌اند و t_i زمان لازم عبور برای قطار iام از یک قسمت مسیر باشد. با توجه به شکل ۳۶ بدیهی است که می‌توان کل زمانی

را که برای انجام این کار لازم است، T، از روی محور زمان به‌دست آورد. و اگر t_s زمان عبورکندروترین قطار باشد،

$$T = \sum_{i=۱}^{k} t_i + (n-۱)t_s$$

و در نتیجه در حالتهای مختلف مقدار T فرقی نمی‌کند.



شکل۳۶

مسأله‌هایی از آزمون ریاضیات دعوتی امریکا، ۱۹۸۸

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۹۹)

هر سال ابتکاراتی که طراحان آزمونهای ریاضیات دعوتی امریکا در طرح مسائل خود به‌کار می‌برند موجب تعجب من می‌شود. تنوع و کیفیت این مسائل بسیار چشمگیر و این مایهٔ دلخوشی کل جامعهٔ ریاضی است. از آنجا که تنها سه ساعت برای پاسخ دادن به ۱۵ پرسش وقت است، این مسائل به دشواری مسائل المپیادها نیستند. با وجود این، این مسائل در سطح خودشان اغلب بسیار ابتکاری‌اند.

			*	
	74			
				186
		103		
0				

شکل ۳۷

مسألهٔ ۱

در ۲۱ خانهٔ خالی آرایهٔ ۵ × ۵ای که در شکل ۳۷ نشان داده شده است می‌توانیم عددهایی صحیح را طوری قرار دهیم که عددهای واقع در هر سطر و هر ستون تصاعدی حسابی تشکیل دهند. عددی را که باید در خانهٔ * قرار گیرد تعیین کنید.

4d			*	
3d	74			
2d	y			186
d	x	103		
0				

شکل۳۸ (الف)

52	82	112	142	
39	74			
26	66			186
13	58	103		
0				

شکل۳۸ (ب)

راه‌حل

عددهای نخستین ستون از پایین به بالا باید ۰، d، $۲d$، $۳d$ و $۴d$ باشند (شکل ۳۸ (الف) را ببینید). درایه‌های x و y در شکل ۳۸ (الف) را می‌توان برحسب d به‌صورت واسطه‌های حسابی همسایه‌هایشان به‌شکل زیر نوشت:

$$x = \frac{d + ۱۰۳}{۲} \qquad (۱)$$

و در نتیجه

$$y = \frac{x + ۷۴}{۲} = \frac{d + ۲۵۱}{۴} \qquad (۲)$$

بنابراین در سطر سوم قدرنسبت تصاعد برابر است با

$$D = y - ۲d = \frac{۲۵۱ - ۷d}{۴}$$

از آنجا که عدد ۱۸۶ در آخر این سطر همان $۲d + ۴D$ است، پس

$$۲d + (۲۵۱ - ۷d) = ۱۸۶$$

$$۶۵ = ۵d$$

و

$$d = ۱۳$$

در نتیجه $x = ۵۸$ و $y = ۶۶$ و می‌توانیم دو ستون اول را تعیین و سطر بالایی را با تصاعد ۵۲، ۸۲، ...، پر کنیم. بنابراین، همان‌طور که در شکل ۳۸ (ب) می‌بینید، درایهٔ موردنظر ۱۴۲ است.

مسألهٔ ۲

وجه‌های چندوجهی محدبی ۱۲ مربع، ۸ شش‌ضلعی منتظم و ۶ هشت‌ضلعی منتظم‌اند. در هر رأس چندوجهی یک مربع، یک شش‌ضلعی و یک هشت ضلعی به‌هم رسیده‌اند. چند تا از پاره‌خطهایی که رأسهای چندوجهی را به‌هم وصل می‌کنند به‌جای اینکه روی یالی از چندوجهی قرارگیرند و یا از روی وجهی از آن بگذرند از درون چندوجهی می‌گذرند؟

راه‌حل

همان‌طور که تلویحاً در صورت مسأله ذکر شد، تعداد پاره‌خطهایی که از درون چندوجهی می‌گذرند برابر است با

$D =$ تعداد کل پاره‌خطهایی که رأسها را به‌هم وصل می‌کنند

− (تعداد قطرهای وجه‌ها) − (تعداد یالها) −

هریک از این مقدارها را می‌توانیم به ترتیب زیر و به‌سادگی محاسبه کنیم.

الف) یالها. هر مربع چهار یال، هر شش‌ضلعی ۶ یال و هر هشت‌ضلعی ۸ یال دارد که کلاً $۱۲ \times ۴ + ۶ \times ۸ + ۸ \times ۶ = ۱۴۴$ یال می‌شود. با وجود این، هر یال مرز دو وجه است و در مجموع بالا هر یال دو بار به‌حساب آمده است. پس تعداد واقعی یالها ۷۲ تاست.

ب) قطرهای وجه‌ها. هر مربع ۲ قطر دارد، هر شش‌ضلعی $\binom{۶}{۲} - ۶ = ۹$ قطر دارد (مجموعاً $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ پاره‌خط وجود دارد که ۶تای آنها یال‌اند) و هر هشت‌ضلعی $\binom{۸}{۲} - ۸ = ۲۰$ قطر دارد: پس مجموعاً

$$۱۲ \times ۲ + ۸ \times ۹ + ۶ \times ۲۰ = ۲۱۶$$

قطر وجود دارد و هر قطر دقیقاً یک بار شمرده شده است.

ج) رأسها. در آخر، تعداد کل رأسها در میان وجه‌ها برابر است با

$$۱۲ \times ۴ + ۸ \times ۶ + ۶ \times ۸ = ۱۴۴$$

ولی فقط $۴۸ = \frac{۱۴۴}{۳}$ رأس در چند وجهی وجود دارد، زیرا هر رأس در چندوجهی رأسی از سه وجه است.

بنابراین تعداد قطرهای درونی مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} D &= \binom{۴۸}{۲} - ۷۲ - ۲۱۶ \\ &= ۲۴ \times ۴۷ - ۷۲ - ۲۱۶ = ۲۴(۴۷ - ۳ - ۹) \\ &= ۲۴ \times ۳۵ = ۸۴۰ \end{aligned}$$

مسألهٔ ۳

اگر a و b عددهایی صحیح باشند و $x^۲ - x - ۱$ عاملی از

$$ax^{۱۷} + bx^{۱۶} + ۱$$

باشد، a را بیابید.

راه‌حل

بنابر قضیهٔ عاملها $x - c$ عاملی از چندجمله‌ای $f(x)$، که ضریبهایش عددهایی صحیح‌اند، است اگر و تنها اگر $f(c) = ۰$. اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۱ = ۰$ برابر با α و β باشند، آنگاه $x^۲ - x - ۱ = (x - \alpha)(x - \beta)$، و اگر $x^۲ - x - ۱$ عاملی از $ax^{۱۷} + bx^{۱۶} + ۱$ باشد، آنگاه عبارتهای $x - \alpha$ و $x - \beta$ نیز عامل آن هستند و

$$a\alpha^{۱۷} + b\alpha^{۱۶} + ۱ = ۰$$

و

$$a\beta^{۱۷} + b\beta^{۱۶} + ۱ = ۰$$

برای یافتن a به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

$$a\alpha^{۱۷}\beta^{۱۶} + b\alpha^{۱۶}\beta^{۱۶} + \beta^{۱۶} = ۰$$

$$a\alpha^{۱۶}\beta^{۱۷} + b\alpha^{۱۶}\beta^{۱۶} + \alpha^{۱۶} = ۰$$

اگر این برابریها را از هم کم کنیم:

$$a\alpha^{۱۶}\beta^{۱۶}(\alpha - \beta) + \beta^{۱۶} - \alpha^{۱۶} = ۰$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$a = \frac{\alpha^{۱۶} - \beta^{۱۶}}{\alpha^{۱۶}\beta^{۱۶}(\alpha - \beta)}$$

چون α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۱ = ۰$ هستند، $\alpha\beta = -۱$ و در نتیجه

$$a = \frac{\alpha^{۱۶} - \beta^{۱۶}}{\alpha - \beta}$$

به‌آسانی می‌توان دریافت که مقدار $\alpha - \beta$ برابر با $\sqrt{۵}$ است، ولی محاسبهٔ مقدار $\alpha^{۱۶} - \beta^{۱۶}$ با توجه به اینکه α و β گنگ‌اند،

$$\alpha = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}, \quad \beta = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$$

کار بسیار دشواری است.

بی‌تردید دانستن این مطلب ارزشمند است که α و β همان عددهایی‌اند که در دستور بینه[1] برای محاسبهٔ عددهای فیبوناچی آمده‌اند:

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

بنابراین عدد مطلوب چیزی بجز $f_{۱۶}$ نیست. از محاسبهٔ ۱۶ جملهٔ اول دنبالهٔ فیبوناچی درمی‌یابیم که مقدار $f_{۱۶}$ برابر با ۹۸۷ است:

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ۱۴۴, ۲۳۳, ۳۷۷, ۶۱۰, \underline{۹۸۷}, \cdots$$

1. Binet

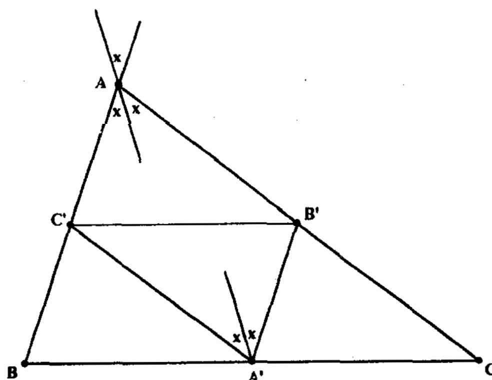
مسألهٔ استفاده نشده‌ای از بلغارستان دربارهٔ مثلث میانه‌ای و مثلث ژرگون

مثلثی که با A'، B' و C'، وسط ضلعهای $\triangle ABC$، مشخص می‌شود، مثلث میانه‌ای آن نامیده می‌شود. بدیهی است که هریک از ضلعهای مثلث میانه‌ای موازی ضلع مقابل آن در $\triangle ABC$ است و در نتیجه زاویهٔ این مثلثها با هم برابرند:

$$\angle A = \angle A', \ \ \angle B = \angle B', \ \ \angle C = \angle C'$$

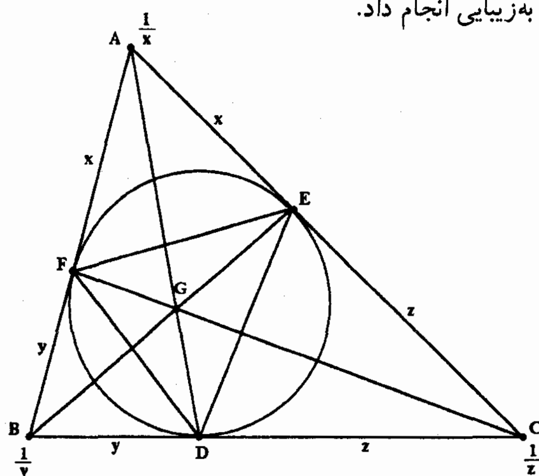
یکی از ویژگیهای مهم مثلث میانه‌ای این است که در هر مثلث و مثلث میانه‌ای آن نیمساز زاویه‌های متناظر با هم موازی‌اند. مثلاً نیمساز زاویه‌های برابر A و A' به یک اندازه به طرف راستای مشترک AB و $A'B'$ کج شده است (شکل ۳۹ را ببینید).

ممکن است شگفت‌انگیز به‌نظر برسد که همواره سه خطی که رأسهای مثلثی مانند ABC را به نقاط تماس دایرهٔ محاطی مثلث با ضلعهای مقابل به آن رأسها وصل می‌کنند، در نقطه‌ای مانند G به‌نام نقطهٔ ژرگون همرس‌اند (شکل ۴۰ را ببینید). این نقطه به‌نام هندسه‌دان فرانسوی ژوزف ژرگون



شکل۳۹

(۱۷۷۱ – ۱۸۵۹ م.) نامگذاری شده است. از آنجا که جای این نقاط تماس، یعنی D، E و F، برحسب اطلاعاتی که به‌آسانی قابل استفاده باشند مشخص نشده است، ممکن است به‌نظر برسد که برهان این حکم ساده نیست. اگرچه می‌توان این حکم را با استفاده از قضیهٔ سوا به‌آسانی ثابت کرد، ولی به‌روش زیر نیز می‌توان کار را به‌زیبایی انجام داد.



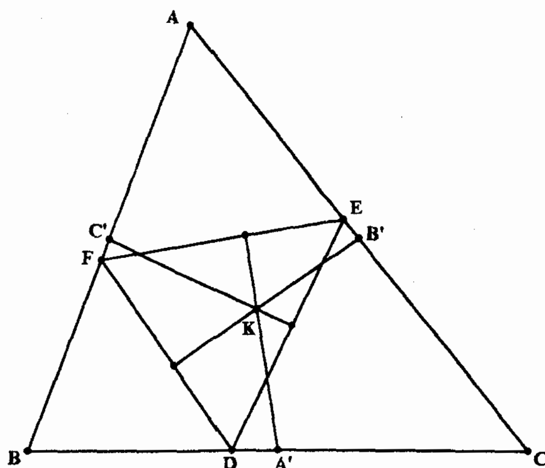
شکل ۴۰

مطابق شکل ۴۰، فرض کنید طول مماسهای مساوی که از رأسهای مثلث بر دایرهٔ محاطی آن رسم شده‌اند، برابر با x، y و z باشند و جرمهای $\frac{1}{x}$، $\frac{1}{y}$ و $\frac{1}{z}$ را به رأسها نسبت داده‌ایم. در این صورت بدیهی است که نقطهٔ F مرکزثقل جرمهای موجود در نقاط A و B است (زیرا $\frac{1}{x} \times x = \frac{1}{y} \times y$) و در نتیجه دستگاه جرمهای موجود معادل است با جرم $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ در نقطهٔ F و جرم $\frac{1}{z}$ در نقطهٔ C. به این ترتیب مرکزثقل کل دستگاه باید جایی روی پاره‌خط FC باشد. ولی همین مطلب دربارهٔ BE و AD نیز درست است و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

مثلث DEF را که از نقاط تماس دایرهٔ محاطی با ضلعها پدید می‌آید مثلث ژرگون $\triangle ABC$ می‌نامیم، اگرچه معتقدم این نامگذاری در کتابهای ریاضی معمول نیست. به این ترتیب می‌توانیم مسألهٔ زیبایی را که چند سال پیش از طرف بلغارستان در یکی از المپیادهای بین‌المللی مطرح شده بود به‌شکل سادهٔ زیر بیان کنیم.

> ثابت کنید در هر مثلث عمودهایی که از رأسهای مثلث میانه‌ای بر ضلعهای مقابلشان از مثلث ژرگون رسم شده‌اند همرس‌اند.

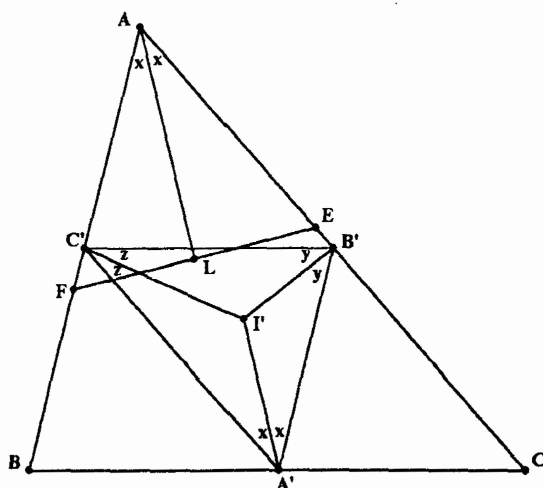
علی‌الظاهر به‌نظر نمی‌رسد ارتباطی میان مثلث میانه‌ای و مثلث ژرگون وجود داشته باشد و از این‌رو ممکن است انتظار داشته باشیم راه‌حل مسأله منوط به پیدا کردن رابطه‌ای دشوار، پیچیده و نه‌چندان جالب توجه باشد. به همین دلیل برهان روشن و ساده‌فهم زیر را از ج. ت. گرونمان از آرنهم در هلند (که در مجلهٔ کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۷۵ نقل شده است) بسیار شگفت‌انگیز است.



شکل۴۱

چون مماسهای AF و AE بر دایرهٔ محاطی برابرند پس $\triangle AFE$ متساوی‌الساقین است (شکل ۴۲ را ببینید) و در نتیجه AL، نیمساز زاویهٔ A، بر قاعدهٔ FE عمود است. به عبارت دیگر هر عمود وارد بر ضلع FE از مثلث ژرگون با AL موازی است.

ولی همان‌طور که در بالا گفتیم نیمساز $\angle A'$ در مثلث میانه‌ای با نیمساز $\angle A$ موازی است، و بنابراین نیمساز $\angle A'$ در حقیقت باید همان عمود موردنظر از A' بر FE باشد. بنابراین سه عمود موردنظر نیمساز زاویه‌های مثلث میانه‌ای‌اند، و در نتیجه در I'، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث میانه‌ای، همرس‌اند.



شکل۴۲

دو راه‌حل از جان‌مورووی از المپیاد دبیرستانی لنینگراد، ۱۹۸۲

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۰۷)

جان مورووی اهل شهر دالاس ایالت تگزاس است و راه‌حلهای برجسته‌ای از او در مجلهٔ کروکس ماتماتیکوروم منتشر شده است.

مسألهٔ ۱

چهار جملهٔ اول دنبالهٔ نامتناهی S که از رقمهای اعشاری تشکیل شده است برابرند با ۱، ۹، ۸ و ۲ و هریک از جمله‌های بعدی با رقم آخر مجموع چهار جملهٔ قبل از آن برابر است. بنابراین S با جمله‌های زیر آغاز می‌شود

$$۱, ۹, ۸, ۲, ۰, ۹, ۹, ۰, ۸, ۶, ۳, ۷, ۴, \cdots$$

آیا ممکن است رقمهای ۳، ۰، ۴ و ۴ در S به‌طور متوالی ظاهر شوند؟

راه‌حل

مطلبی که باید مورد توجه قرار دهیم این است که این دنباله از روی چهار جملهٔ متوالی‌اش، هر جا که باشند، به‌طور کامل مشخص می‌شود. برای مثال، چهار جملهٔ ۸، ۲، ۰ و ۹ در مکانهای ۳ تا ۶ نه‌تنها جمله‌های بعدی را به‌دست می‌دهند، بلکه همهٔ جمله‌های قبلی را نیز تولید می‌کنند. بدیهی است که اگر

$$y, x, ۸, ۲, ۰, ۹$$

رقم آخر $۰ + ۲ + ۸ + x$ باید برابر با ۹ باشد؛ یعنی x برابر با ۹ است و بنابراین رقم آخر $۲ + ۸ + ۹ + y$ باید ۰ باشد که در نتیجه $y = ۱$. در حقیقت، دنبالهٔ S صرفاً شاخه‌ای از دنباله‌ای مانند T است که از دو جهت به‌طور نامتناهی ادامه دارد و هر جا که چهار جملهٔ متوالی آن‌را انتخاب کنیم بقیهٔ دنباله از روی آنها کاملاً مشخص می‌شود.

اگر چند جمله از پشت سر S را پیدا کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\ldots, ۳, ۰, ۴, ۴, \overleftarrow{۱, ۹}, ۸, ۲, \ldots$$

از اینجا معلوم می‌شود که هدف بررسیهای ما، یعنی پیدا کردن چهار جملهٔ متوالی ۳، ۰، ۴ و ۴، مطمئناً در دنبالهٔ کامل، T، دست یافتنی است. در نتیجه، اگر دنبالهٔ T متناوب باشد، آنگاه ۳، ۰، ۴ و ۴ بی‌نهایت بار پشت سر هم در هریک از شاخه‌های آن ظاهر می‌شوند.

از این‌رو فرض کنید دنبالهٔ T در دو طرف بلوک $\underline{۱, ۹, ۸, ۲}$ به بلوکهایی مجاور هم و شامل چهار جملهٔ متوالی افراز شده باشد:

$$\leftarrow T \rightarrow$$

$$\ldots \underline{۳, ۰, ۴, ۴} \quad \underline{۱, ۹, ۸, ۲} \quad \underline{۰, ۹, ۹, ۰} \quad \underline{۸, ۶, ۳, ۷} \ldots$$

از آنجا که در دستگاه دهدهی تنها $۱۰^۴$ بلوک مختلف وجود دارد، بلوکی مانند $\underline{a, b, c, d}$ باید دوبار در T، مثلاً در جای بلوکهای mام و nام، ظاهر شود که در اینجا شمارش از بلوک $\underline{۱, ۹, ۸, ۲}$ آغاز شده است و ممکن است m و n منفی باشند:

$$\ldots \underline{۳, ۰, ۴, ۴,} \quad \underline{۱, ۹, ۸, ۲,} \ldots \underset{(m)}{\underline{a, b, c, d}} \ldots \underset{(n)}{\underline{a, b, c, d}} \ldots$$

از آنجا که دنبالهٔ T را می‌توان به‌طور کامل با هریک از بلوکها ساخت، بلوکهایی که درست پیش از تکرار $\underline{a, b, c, d}$ قرار دارند، یعنی بلوکهایی که در مکانهای $(m - ۱)$ام و $(n - ۱)$ام واقع‌اند، باید با یکدیگر مساوی باشند. به همین ترتیب نتیجه می‌شود که بلوکهای واقع در مکانهای $(m - ۲)$ام و $(n - ۲)$ام مساوی‌اند و این نتیجه در تمام T درست است. بنابراین T متناوب است و نتیجه می‌شود که در حقیقت دنبالهٔ S بی‌نهایت بار شامل ۳، ۰، ۴، ۴ است.

مسألهٔ ۲

هریک از خانه‌های شبکه‌ای مستطیلی به ابعاد ۴۱ × ۵ با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ شده است. ثابت کنید ۳ سطر و ۳ ستون در این شبکه وجود دارد که ۹ خانهٔ حاصل از تقاطع آنها همرنگ‌اند.

راه‌حل

از آنجا که تنها از دو رنگ استفاده شده است، بنابر اصل لانه‌کبوتری در ستونی ۵ خانه‌ای یکی از رنگها باید دست‌کم در ۳ خانه به چشم آید. فرض کنید در مورد هریک از ۴۱ ستون شبکه این رنگ «برتر» را مشخص کرده‌ایم.

بازهم چون تنها از دو رنگ استفاده شده است، بین این ۴۱ رنگ برتر، یکی از رنگها دست‌کم به ۲۱ ستون مربوط می‌شود. فرض کنید بجز ۲۱ ستون که به یک رنگ برتر، مثلاً قرمز، هستند، بقیه را حذف کنیم.

در هریک از این ۲۱ ستون، سه سطر دلخواه که شامل خانه‌های قرمزند در نظر بگیرید (ممکن است بیش از ۳ سطر برای انتخاب کردن وجود داشته باشد). با حذف کردن دیگر خانه‌های این ستونها، به ۲۱ ستون می‌رسیم که هر کدام از آنها شامل ۳ خانهٔ قرمز در یکی از زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعهٔ ۵ عضوی سطرهای خود است.

اکنون، فقط می‌توان $۱۰ = \binom{۵}{۳}$ زیرمجموعهٔ ۳تایی از ستونی ۵ سطری انتخاب کرد (یعنی $\{(۱,۲,۳),(۱,۲,۴),\cdots,(۳,۴,۵)\}$). بنابراین، در گردایه‌ای متشکل از ۲۱ ستون، دست‌کم یکی از ۱۰ زیرمجموعهٔ ممکن، مثلاً (a,b,c)، باید در ۳ ستون یا بیش از ۳ ستون مثلاً در ستونهای $(c_۱,c_۲,c_۳,\cdots)$، ظاهر شود. (این مطلب، از شکل کلیتری از اصل لانه‌کبوتری به‌دست می‌آید: اگر $kn+۱$ شیء را در n جعبه توزیع کنیم، یکی از جعبه‌ها باید دست‌کم شامل $k+۱$ شیء باشد، زیرا در غیر این صورت مجموع کل اشیا بیش از kn نیست، و این‌هم تناقض است.)

	$c_۱$	$c_۲$	$c_۳$
a	*	*	*
– – –	– – –	– – –	– – –
– – –	– – –	– – –	– – –
b	*	*	*
c	*	*	*

بنابراین ۹ خانه در تقاطع این سطرها و ستونها همگی قرمزند.

تمرین

اگر تنها از ۳ رنگ استفاده کنیم و بخواهیم مطمئن شویم که زیرشبکه‌ای تکرنگ به ابعاد ۴×۴ وجود دارد، ابعاد آرایه را باید تا چه اندازهٔ بزرگ کنیم؟

راه‌حل

وقتی‌که استفاده از c رنگ مجاز است، برای حصول اطمینان از وجود شبکه‌ای تکرنگ به ابعاد $a \times a$ باید آرایه آنقدر بزرگ شود تا ابعادی برابر با $c(a-۱)+۱$ در

$$c\left[(a-۱)\binom{c(a-۱)+۱}{a}\right]+۱$$

داشته باشد. در مورد شبکه‌ای ۴×۴ و ۳ رنگ، آرایه‌ای به ابعاد ۱۸۹۱×۱۰ و در مورد شبکه‌ای ۵×۵ و ۴ رنگ، آرایه‌ای به ابعاد ۹۹۰۰۹×۱۷ لازم است.

دو راه‌حل از اِد دولیتِل

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۷۰، ۷۱)

اینک به دو مسأله می‌پردازیم که از المپیاد بین‌المللی ۱۹۸۵ به یادگار مانده است. راه‌حلهای زیبای زیر مربوط به اِد دولیتل از دانشگاه تورنتوست. (مسألهٔ اول را یکی از حل‌کنندگان باهوش مسأله‌های ریاضی، دانیل راپ، از دانشگاه دولتی واشنگتن در شهر سنت‌لوییس ایالت میسوری نیز حل کرده است.)

۱. مسأله‌ای از رومانی

از آنجا که $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n\sqrt{۲}$ هیچ‌گاه عددی صحیح نمی‌شود. در این مسأله، با دنباله‌ای از عددهای صحیح به‌نام S سروکار داریم که از مقادیر حاصل از $(n\sqrt{۲})$ها پس از حذف جزءِ کسری آنها به‌دست می‌آید، یعنی دنباله‌ای که از مقادیر $[n\sqrt{۲}]$، $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ تشکیل شده است.

سه جملهٔ اول S عبارت‌اند از

$$[\sqrt{۲}] = ۱, \quad [۲\sqrt{۲}] = [۲/۸\cdots] = ۲, \quad [۳\sqrt{۲}] = [۴/۲۴\cdots] = ۴$$

توجه کنید که هر یک از این مقادیر توانی از ۲ است. در مورد جملهٔ ششم بازهم $۸ = [۸/۴۸\cdots] = [۶\sqrt{۲}]$ و نیز در مورد جملهٔ دوازدهم $۱۶ = [۱۶/۹\cdots] = [۱۲\sqrt{۲}]$، که این دو هم توان ۲ هستند. برخی اوقات توانی از ۲ جا افتاده است، مانند ۶۴:

$$[۴۵\sqrt{۲}] = [۶۳/۶\cdots] = ۶۳, \quad [۴۶\sqrt{۲}] = [۶۵/۰۵\cdots] = ۶۵$$

با وجود این، ثابت کنید S شامل تعدادی نامتناهی از توانهای ۲ است.

راه‌حل

راه‌حل دولیتل کمتر از شاهکار نیست! او کار را با ذکر این مطلب آغاز می‌کند که مقدار $\sqrt{۲}$، هنگامی‌که در دستگاه دودویی نوشته شود، شامل بی‌نهایت رقم ۱ است:

$$\sqrt{۲} = ۱/۰۱۱۰۱\cdots$$

اگر این مطلب درست نباشد، از جایی به بعد همهٔ رقمها باید برابر با تنها امکان دیگر، یعنی ۰، باشند که در این صورت حاصل عددی اعشاری و مختوم خواهد بود و این موجب می‌شود که $\sqrt{۲}$ گویا باشد.
اینک، در مقیاس دودویی، ضرب در ۲ ممیز را یک مکان به طرف راست منتقل می‌کند:

$$۲\sqrt{۲} = ۱۰/۱۱۰۱۰\cdots, \quad ۲^۲\sqrt{۲} = ۱۰۱/۱۰۱۰\cdots$$

و الی آخر. چون $\sqrt{۲}$ شامل بی‌نهایت عدد ۱ است، تعدادی بی‌شمار توان مانند ۲^n وجود دارد به‌طوری‌که ممیز $۲^n\sqrt{۲}$ در طرف چپ یکی از ۱ها قرار می‌گیرد، مانند $۲^۲\sqrt{۲} = ۱۰۱/۱۰۱۰\cdots$. در چنین حالتی، جزءِ کسری $۲^n\sqrt{۲}$ عبارتی به‌شکل $۰/۱۰۱۰\cdots$ است که با عدد ۱ی درست در طرف راست ممیز آغاز می‌شود و به‌دلیل اینکه همواره ۱های دیگری در ادامهٔ عبارت وجود دارد، مقدار آن از

$$۰/۱۰۰۰۰۰۰۰۰\cdots = ۰/۱\bar{۰} = \frac{۱}{۲}$$

بیشتر است. اگر جزءِ کسری x را با $\{x\}$ نشان دهیم، ثابت کرده‌ایم که مجموعه‌ای نامتناهی از مقادیری مانند n، یعنی $A = (۱, ۲, \cdots)$، وجود دارد که در نابرابری زیر صدق می‌کند

$$\{۲^n\sqrt{۲}\} > \frac{۱}{۲}$$

حال، عدد $\frac{۱}{۲}$ نیست که ما به آن علاقه‌مندیم، بلکه عدد موردنظر، $۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است. از آنجا که این عدد از $\frac{۱}{۲}$ کمتر است، هر مقداری مانند n در مجموعهٔ نامتناهی A در نابرابری زیر نیز صدق می‌کند

$$\{۲^n\sqrt{۲}\} > ۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

در این موارد

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}} > ۱ - \{۲^n\sqrt{۲}\}$$

و یا پس از ساده کردن

$$۰ < \left(۱ - \{۲^n\sqrt{۲}\}\right)\sqrt{۲} < ۱$$

بدیهی است که اگر به عدد صحیحی مانند m عددی که بین ۰ و ۱ قرار دارد اضافه کنیم، حاصل به عدد صحیح بعدی نمی‌رسد و جزءِ صحیح این عدد تغییر نمی‌کند:

به‌ازای $۰ < x < ۱$، $[m + x]$ همان عدد صحیح m است.

بنابراین، افزودن $\left(۱ - \{۲^n\sqrt{۲}\}\right)\sqrt{۲}$ به $۲^{n+۱}$ مقدار جزءِ صحیح آن‌را تغییر نمی‌دهد و

$$\left[۲^{n+۱} + \left(۱ - \{۲^n\sqrt{۲}\}\right)\sqrt{۲}\right] = ۲^{n+۱}$$

چون $۲^{n+۱}$ به‌صورت $\sqrt{۲}(۲^n\sqrt{۲})$ تجزیه می‌شود، می‌توانیم از عامل مشترک $\sqrt{۲}$ فاکتورگیری کنیم:

$$\left[\left(۲^n\sqrt{۲} + ۱ - \{۲^n\sqrt{۲}\}\right)\sqrt{۲}\right] = ۲^{n+۱}$$

پس از کمی مرتب کردن به‌دست می‌آوریم

$$\left[\left(۲^n\sqrt{۲} - \{۲^n\sqrt{۲}\} + ۱\right)\sqrt{۲}\right] = ۲^{n+۱}$$

اینک، با حذف کردن جزءِ کسری از عدد فقط جزءِ صحیح آن باقی می‌ماند؛ در نتیجه

$$۲^n\sqrt{۲} - \{۲^n\sqrt{۲}\} = [۲^n\sqrt{۲}]$$

بنابراین

$$\left[\left([۲^n\sqrt{۲}] + ۱\right)\sqrt{۲}\right] = ۲^{n+۱}$$

در نهایت با افزودن ۱ به $[x]$، جزءِ صحیح عدد $x + ۱$ به‌دست می‌آید:

$$[x] + ۱ = [x + ۱]$$

بنابراین

$$\left[[۲^n\sqrt{۲} + ۱]\sqrt{۲}\right] = ۲^{n+۱}$$

به‌عبارت دیگر، اگر $k = [۲^n\sqrt{۲} + ۱]$،

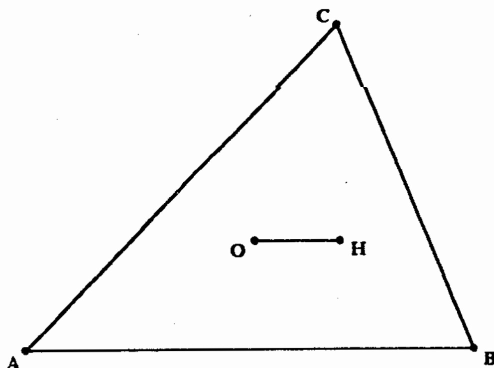
$$[k\sqrt{۲}] = ۲^{n+۱}$$

که سمت راستش توانی از ۲ است. از آنجا که به‌وضوح به‌ازای nهای مختلف kهای مختلفی به‌دست می‌آید، مجموعهٔ نامتناهی A دلیل بر وجود تعدادی نامتناهی از توانهای ۲ در دنبالهٔ S است.

۲. ترسیم هندسی

مسأله‌ای از اسپانیا

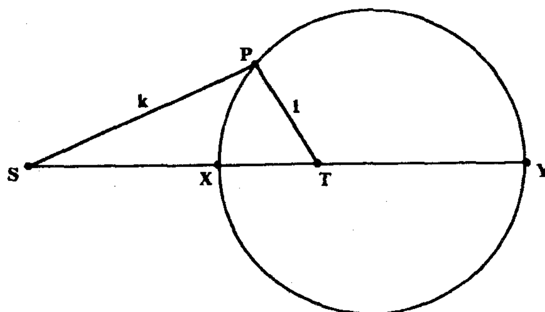
طبق معمول، فرض کنید مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث را به‌ترتیب با O و H نشان دهیم. مسأله این است که مثلث ABC را با توجه به اطلاعات اندک زیر دربارهٔ AB و OH رسم کنید: تمام آنچه برای شما مشخص شده طول AB و طول OH است و نیز اینکه این‌دو با هم موازی‌اند. (البته وضعیت نسبی آنها برای ما معلوم نیست.)



شکل۴۳

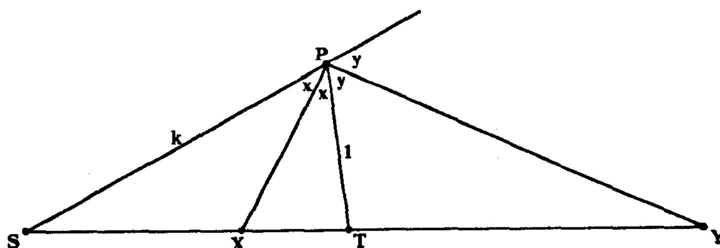
دایرهٔ آپولونیوس

راه‌حل شگفت‌انگیز دولیتل با مشخص کردن پاره‌خطی از AB، که طولش معلوم است، آغاز می‌شود و سپس مکان نقطهٔ O را نسبت به آن مشخص می‌کند به‌طوری‌که پس از آن کار ترسیم به‌آسانی خاتمه می‌یابد. یکی از مکانهای‌هندسی که به‌وضوح O روی آن قرار دارد عمودمنصف AB است. مسأله، یافتن دومین مکان‌هندسی قابل ترسیمی است که از O می‌گذرد.



شکل۴۴

به‌نظر می‌رسد که رسم نقطه‌ای مانند M با این ویژگی که فاصلهٔ O تا A دو برابر فاصله‌اش تا M است کار دشواری نیست. حال، بنابر کشف هندسه‌دان بزرگ یونان باستان، آپولونیوس پرگایی (۱۹۵ – ۲۶۲ ق.م.)، مکان‌هندسی نقطه‌ای مانند P که مسیر حرکت آن به‌گونه‌ای است که فاصله‌اش تا نقطهٔ ثابتی مانند S همواره k برابر فاصلهٔ آن تا نقطهٔ ثابتی مانند T است، دایره‌ای به قطر XY است که در آن X و Y نقاطی هستند که پاره‌خط ST را به نسبت درونی و بیرونی و به نسبت ۱ : k تقسیم می‌کنند. از آنجا که برای تقسیم پاره‌خطی به نسبت معلوم ستاره و پرگار کافی است، می‌توانیم دایرهٔ آپولونیوس را در مورد نقاط A و M و نسبت ۱ : ۲ رسم کنیم، تا به این ترتیب دومین مکان‌هندسی که از O می‌گذرد مشخص شود. بیایید در اینجا کمی از موضوع منحرف شویم و این قضیهٔ مفید آپولونیوس را ثابت کنیم.



شکل۴۵

می‌خواهیم ثابت کنیم که هر نقطه‌ای مانند P که فاصله‌اش تا S، k برابر فاصلهٔ آن تا T است، باید روی این دایره قرار داشته باشد و برعکس، هر نقطه‌ای روی این دایره باید فاصله‌اش تا S، k برابر فاصله‌اش تا T باشد. این قسمتها را به‌ترتیب ثابت می‌کنیم.

الف) $PS = k \times PT$.

برهان این قسمت براساس این قضیه است که نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس مثلث ضلع مقابل آن‌را در نقاطی قطع می‌کنند که آن‌را به نسبت درونی و بیرونی و به نسبت دو ضلع دیگر مثلث تقسیم می‌کنند. با اتکا بر این قضیه، از شرط $PS = k \times PT$ بلافاصله نتیجه می‌شود

$$\frac{SX}{XT} = \frac{k}{۱}, \quad \frac{SY}{TY} = \frac{k}{۱}$$

نقطهٔ P به هر ترتیبی که تحت شرط $PS = k \times PT$ تغییر کند، نیمساز $\angle SPT$ همواره ضلع ST را به نسبت ۱ : k تقسیم می‌کند، و در نتیجه همواره از نقطهٔ X می‌گذرد. به همین ترتیب، نیمساز خارجی نیز همواره از نقطهٔ Y می‌گذرد و بدیهی است که $\angle XPY$ همواره نصف زاویهٔ نیمصفحه، یعنی قائمه، است و در نتیجه P همواره روی دایره‌ای به قطر XY قرار دارد.

ب) P نقطه‌ای روی دایرهٔ به قطر XY است.

اثبات عکس قضیه جالبتر است. این‌بار، بنابر تعریف X و Y می‌دانیم که پاره‌خط ST را به نسبت درونی و بیرونی و به نسبت ۱ : k تقسیم می‌کنند و می‌خواهیم ثابت کنیم $PS = k \times PT$ دست‌کم از قائمه بودن P نتیجه می‌شود که مجموع θ و ϕ، اندازهٔ زاویه‌های X و Y در $\triangle XPY$، برابر با قائمه است. اگر با رسم TU به موازات PX و TV به موازات PY این زاویه‌ها را بازسازی کنیم، $\angle VTU$ نیز قائمه می‌شود.

این خطهای موازی به ترتیب زیر قسمتهای پاره‌خط SU را تقسیم می‌کنند:

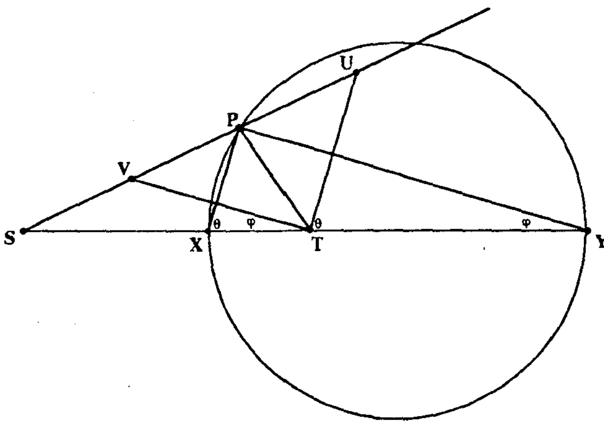
$$\frac{SX}{XT} = \frac{SP}{PU} = \frac{k}{۱}, \quad \frac{SP}{TY} = \frac{SP}{VP} = \frac{k}{۱}$$

در نتیجه $\frac{SP}{PU} = \frac{SP}{VP}$ و یا $PU = VP$، و این یعنی P وسط وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ VTU است. از آنجا که P مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث است، از هر سه رأس آن به یک فاصله است و در نتیجه $PT = PU$. در نهایت اگر بدانیم $\frac{SP}{PU} = \frac{k}{۱}$، آنگاه $\frac{SP}{PT} = \frac{k}{۱}$. اینک به ترسیم مثلث ABC می‌پردازیم.

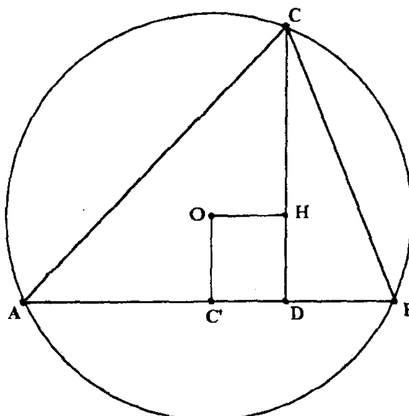
راه‌حل

از آنجا که مرکز دایرهٔ محیطی، O، نقش مهمی در اطلاعات داده شده دارد، توجه کردن به دایرهٔ محیطی موجه به‌نظر می‌رسد. ارتفاع CH و نیز OC'، عمودمنصف AB، پاره‌خط AB را تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند (شکل ۴۷ را ببینید). بنابراین HD و OC' با هم موازی‌اند. چون OH و AB نیز با هم موازی‌اند، چهارضلعی $OC'DH$ مستطیل و در نتیجه طول $C'D$ برابر با طول OH است که مقدارش معلوم است. بنابراین می‌توانیم نقطهٔ C'، وسط AB، را تعیین کنیم و به‌اندازهٔ طول OH از C' دور شویم تا نقطهٔ

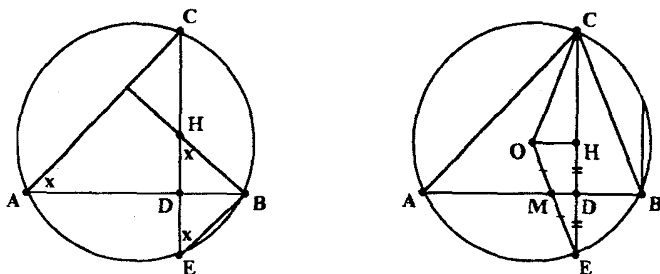
D را بیابیم. بنابراین، یکی از مکانهای‌هندسی قابل ترسیمی که از رأس سوم، C، می‌گذرد عمودی است که در نقطهٔ D بر AB رسم شود. همان‌طور که خواهیم دید دومین مکان‌هندسی که از نقطهٔ C می‌گذرد، و جای C را روی این خط عمود مشخص می‌کند، خود دایرهٔ محیطی مثلث است. به این ترتیب مسأله به تعیین جای نقطهٔ O منجر می‌شود. البته برای حل این مسأله نیازمند یافتن دو مکان‌هندسی هستیم که از نقطهٔ O بگذرند. همان‌طور که گفتیم این مکانها عمودمنصف AB و دایرهٔ آپولونیوس‌اند. بالاخره به مسألهٔ تعیین محل نقطهٔ اسرارآمیز M رسیدیم که در بحث قبل با آن برخورد کردیم.



شکل ۴۶



شکل ۴۷



شکل۴۸

می‌خواهیم از این ویژگی جالب توجه استفاده کنیم که اگر ارتفاع CD را آنقدر ادامه دهیم که دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E قطع کند، آنگاه پای ارتفاع، D، وسط HE است؛ به عبارت دیگر، $HD = DE$ (شکل ۴۸ را ببینید). درصورتی‌که ثابت کنیم $\triangle BHE$ به‌دلیل برابر بودن زاویه‌های مجاور به قاعده‌اش، H و E، متساوی‌الساقین است، این مطلب به‌زیبایی ثابت می‌شود (زیرا در این صورت ارتفاع BD قاعده را نصف می‌کند). برای اثبات این مطلب، کافی است توجه کنیم که هریک از این زاویه‌های مجاور به قاعده با زاویهٔ A در مثلث برابر است:

> بدیهی است که زاویه‌های A و E مقابل به کمان BC از دایرهٔ محیطی‌اند و ارتفاع BH بر AC عمود است، ضلعهای زاویهٔ H به ترتیبی بر ضلعهای زاویهٔ A عمودند (دورانی به‌اندازهٔ 90° حول H موجب می‌شود که ضلعهای زاویهٔ H با ضلعهای AC و AB موازی شوند).

بنابراین D وسط HE است و چون DA با OH موازی است، در $\triangle OHE$، ضلع OE پاره‌خط AD را در نقطهٔ وسطش، M، قطع می‌کند (خطی که از وسط یکی از ضلعهای مثلث به موازات ضلع دیگر رسم شود ضلع سوم را نصف می‌کند). بنابراین فاصلهٔ O تا M برابر با نصف شعاع OE است درحالی‌که طول OA برابر با شعاع دایره است. بنابراین O باید بر دایرهٔ آپولونیوس متناظر دو نقطهٔ ثابت A و M و به نسبت ۱ : ۲ قرارگیرد.

باید توجه کنیم که هنوز جای نقطهٔ M را تعیین نکرده‌ایم. با این حال، به‌سادگی می‌توان این کار را انجام داد، به این ترتیب که توجه کنید DM، که در $\triangle OHE$ وسط ضلعهای HE و OE را به هم وصل می‌کند، نصف ضلع OH و موازی با آن است. در نتیجه، می‌توان M را با جدا کردن طولی به‌اندازهٔ نصف طول OH روی DA و از طرف D رسم کرد، و همان‌طور که انتظار داشتیم ترسیم $\triangle ABC$ پایان می‌پذیرد.

مسأله‌ای از المپیاد اسپانیا، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۳۲. راه‌حل دیگری در ۱۹۹۰، ۷۲ آمده است.)

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید معادلهٔ

$$P_n(x) = x^{n+۲} - ۲x + ۱ = ۰$$

دقیقاً یک ریشه مانند c_n بین ۰ و ۱ دارد و مقدار $\lim_{n\to\infty} c_n$ را به‌دست آورید.

راه‌حل

از آنجا که مجموع ضریبها برابر است با ۰ = ۱ + ۲ − ۱، ۱ = x یکی از ۲ + n ریشهٔ معادله و ۱ − x یکی از عاملهای $x^{n+۲} - ۲x + ۱$ است. پس ریشهٔ موردنظر در فاصلهٔ ۰ و ۱ مربوط به عامل دیگر $x^{n+۲} - ۲x + ۱$ است و این مطلب ما را بر آن می‌دارد که این عامل را بیابیم. به‌هر حال این کار را می‌توان انجام داد (یکی از رهیافتها تقسیم طولانی است). به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که نتیجه به‌شکل زیر است

$$x^{n+۲} - ۲x + ۱ = (x - ۱)(x^{n+۱} + x^n + \cdots + x - ۱)$$

(به جملهٔ ۱− در انتها توجه کنید). بنابراین ۱ + n ریشهٔ دیگر معادله ریشه‌های معادلهٔ زیرند:

$$Q_n(x) = x^{n+۱} + x^n + \cdots + x - ۱ = ۰$$

اکنون، ۱− = $Q_n(۰)$ و چون ۲ ⩽ ۱ + n، ۰ < ۱ − ۱ + ۱ ⩽ $Q_n(۱)$. از آنجا که چندجمله‌ایها پیوسته‌اند، بنابر قضیهٔ مقدار میانی به‌ازای xای بین ۰ و ۱، ۰ = $Q_n(x)$. بنابراین، معادلهٔ ۰ = $P_n(x)$ ریشه‌ای مانند c_n بین ۰ و ۱ دارد.

به‌آسانی معلوم می‌شود تنها ریشه‌ای از ۰ = $Q_n(x)$ که بین ۰ و ۱ واقع است، همین c_n است. هر ریشه‌ای مانند x از این نوع در معادلهٔ

$$x^{n+۱} + x^n + \cdots + x = ۱$$

صدق می‌کند. در مورد ریشهٔ دیگری مانند y بین ۰ و ۱ بازهم

$$y^{n+1} + y^n + \cdots + y = 1$$

حال اگر $x > y$، آنگاه همیشه $y^k < x^k$ و در نتیجه

$$y^{n+1} + y^n + \cdots + y < x^{n+1} + x^n + \cdots + x = 1$$

که تناقض است. به همین ترتیب این فرض که $x < y$ به تناقض می‌انجامد. با وجود این، هنوز باید ثابت کنیم این فرض که $x = y$ نیز درست نیست، به عبارت دیگر، $x = c_n$ ریشه‌ای مضاعف نیست.

ریشهٔ مضاعف ریشهٔ معادله‌ای است که از مشتق‌گیری $P_n(x) = 0$ به‌دست می‌آید (این نتیجه معادل با این است که نمودار $y = P_n(x)$ بر محور xها مماس است). اگر c_n ریشه‌ای مضاعف باشد، آنگاه برابریهای

$$c_n^{n+2} - 2c_n + 1 = 0$$

و

$$(n+1)c_n^{n+1} - 2 = 0$$

هردو درست‌اند. از برابری دوم به‌دست می‌آوریم

$$2 = (n+2)c_n^{n+1}$$

و اگر در برابری اول به‌جای ۲ مقدارش را از این برابری جایگزین کنیم حاصل می‌شود

$$c_n^{n+2} - (n+2)c_n^{n+2} + 1 = 0$$

و در نتیجه

$$1 = (n+1)c_n^{n+2}$$

و یا

$$c_n^{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

بنابراین اولین برابری به‌صورت زیر است

$$\frac{1}{n+1} - 2c_n + 1 = 0$$

و در نتیجه

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + 1\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

و نیز به‌دست می‌آوریم

$$c_n^{n+2} = \left(\frac{n+2}{2(n+1)}\right)^{n+2}$$

با مساوی هم قرار دادن این دو مقدار از $c_n^{n+۲}$ به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{n+۲}{۲(n+۱)}\right)^{n+۲}=\frac{۱}{n+۱}$$

$$(n+۲)\left(\frac{n+۲}{n+۱}\right)^{n+۱}=۲^{n+۲}$$

و در نتیجه

$$\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}=\frac{۲^{n+۲}}{n+۲}$$

اینک معلوم است که طرف چپ این برابری کمتر از $e=۲/۷۱\cdots$، پایهٔ لگاریتم طبیعی، است و در نتیجه

$$\frac{۲^{n+۲}}{n+۲}<۳$$

و یا $۲^{n+۲}<۳n+۶$ که مطمئناً به‌ازای $n=۲,۳,\cdots$ نادرست است. بنابراین به‌ازای $n\geqslant ۲$، $x=c_n$ ریشهٔ مضاعف $P_n(x)=۰$ نیست. با حل کردن معادلهٔ $P_۱(x)=۰$ سه ریشهٔ متمایز به‌دست می‌آوریم و نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر n، c_n ریشه‌ای مضاعف نیست:

$$P_۱(x)=x^۳-۲x+۱=(x-۱)(x^۲+x-۱)=۰$$

که در نتیجه $x=۱$ و $\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$. بنابراین به‌ازای هر n، c_n تنها ریشهٔ معادلهٔ $P_n(x)=۰$ است که بین ۰ و ۱ قرار دارد.

اینک از برابری

$$c_n^{n+۲}-۲c_n+۱=۰$$

به‌دست می‌آوریم

$$c_n=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}c_n^{n+۲}$$

و در نتیجه به‌ازای هر n،

$$c_n>\frac{۱}{۲}$$

در اینجا وسوسه می‌شویم که کار را با اثبات نتیجهٔ زیر تمام کنیم: از

$$c_n<۱,\quad c_n^{n+۲}-۲c_n+۱=۰$$

نتیجه می‌شود، وقتی‌که $n\to\infty$، $c_n^{n+۲}\to ۰$ و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{۱}{۲}$$

مشکلی که در اینجا وجود دارد این است که مقدار c_n با تغییر n تغییر می‌کند و آنچه می‌دانیم این است که می‌توان c_n را با تابعی شبیه به

$$c_n=۱-\frac{۱}{n}$$

به‌طور قابل قبولی مشخص کرد، که در این حالت c_nها به ۱ میل می‌کنند. روشن است که باید این امر را دقیقتر بررسی کنیم.

به کمک استدلالی که پیش از این به‌کار بردیم می‌توانیم با کمی کوشش ثابت کنیم که با افزایش n، c_n کاهش می‌یابد. از آنجا که c_n ریشهٔ معادلهٔ $Q_n(x) = 0$ است،

$$c_n^{n+1} + c_n^n + \cdots + c_n = 1$$

و به همین ترتیب

$$c_{n+1}^{n+2} + c_{n+1}^{n+1} + \cdots + c_{n+1} = 0$$

اینک اگر c_{n+1} بزرگتر از c_n یا مساوی با آن باشد، همیشه $c_{n+1}^k \geqslant c_n^k$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} c_{n+1}^{n+2} + (c_{n+1}^{n+1} + \cdots + c_{n+1}) &\geqslant c_{n+1}^{n+2} + (c_n^{n+1} + \cdots + c_n) \\ &= c_{n+1}^{n+2} + 1 > 1 \end{aligned}$$

که تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$c_n < c_{n+1}$$

و

$$c_n < c_1, \quad n > 1$$

پس به‌ازای $n > 1$،

$$\frac{1}{2} < c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_n^{n+2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_1^{n+2}$$

که در آن c_1 مقدار ثابتی کوچکتر از ۱ است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که دقیقاً

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}$$

مسأله‌ای از یوهان والتر

طرح مسألهٔ زیبای زیر را مدیون یوهان والتر (مؤسسهٔ ریاضیات، آخن، آلمان) هستیم.

ثابت کنید عددهایی طبیعی و فرد مانند x، y و z وجود ندارند که در رابطهٔ فیثاغورسی زیر صدق کنند

$$(x+y)^۲+(x+z)^۲=(y+z)^۲$$

دکتر والتر چهار راه‌حل زیر را برای این مسأله عرضه کرده است. این راه‌حلها از رهیافتی مستقیم و ساده آغاز شده و به یورشی نسبتاً پیچیده می‌انجامند. در هریک از آنها حکم مسأله از طریق رسیدن به تناقض به‌دست می‌آید.

ساده‌ترین راه‌حل

درصورتی‌که عددهایی طبیعی و فرد مانند

$$x=۲a+۱,\ \ y=۲b+۱,\ \ z=۲c+۱$$

در رابطهٔ فیثاغورسی موردنظر صدق کنند، آنگاه

$$(۲a+۲b+۲)^۲+(۲a+۲c+۲)^۲=(۲b+۲c+۲)^۲$$

$$(a+b+۱)^۲+(a+c+۱)^۲=(b+c+۱)^۲$$

$$(a^۲+b^۲+۱+۲ab+۲a+۲b)+(a^۲+c^۲+۱+۲ac+۲a+۲c)$$
$$=b^۲+c^۲+۱+۲bc+۲b+۲c$$

$$۲a^۲+۲ab+۲ac+۴a+۱=۲bc$$

که تناقض است، زیرا عددی فرد با عددی زوج برابر شده است.

زیباترین راه‌حل (از د. کِنیپِرت، آخن)

اگر عددهای طبیعی و فرد x، y و z در برابری

$$(x+y)^۲+(x+z)^۲=(y+z)^۲$$

صدق کنند، آنگاه

$$(x^۲+۲xy+y^۲)+(x^۲+۲xz+z^۲)=y^۲+۲yz+z^۲$$
$$x^۲+xy+xz=yz$$

با افزودن yz به دو طرف این برابری حاصل می‌شود

$$(x+y)(x+z)=۲yz$$

ولی این برابری ناممکن است، زیرا $x+y$ و $x+z$ هردو زوج‌اند و در نتیجه طرف چپش مضرب ۴ است درحالی‌که طرف راستش تنها بر ۲ بخش‌پذیر است، زیرا y و z هردو فردند.

شکل دیگری از راه‌حل کنیپرت (از ی. والتر)

کار را از برابری

$$x^۲+xy+xz=yz$$

در راه‌حل دوم دنبال می‌کنیم. با انتقال xz به طرف دیگر و فاکتورگیری به‌دست می‌آوریم

$$x(x+y)=z(y-x)$$

و در نتیجه

$$x\times\frac{x+y}{۲}=z\times\frac{y-x}{۲}$$

چون $x+y$ و $y-x$ هردو زوج‌اند، کسرهای $\frac{x+y}{۲}$ و $\frac{y-x}{۲}$ عددهایی صحیح‌اند و تا اینجا به‌نظر می‌رسد که همه چیز درست است. ولی این برابری در حقیقت برابریی بین عددی فرد و عددی زوج است، زیرا زوجیت $\frac{x+y}{۲}$ و $\frac{y-x}{۲}$ متفاوت است، به این دلیل که تفاضل آنها برابر با عدد فرد x است.

رهیافتی نسبتاً پیچیده‌تر

قضیهٔ اساسی سه‌تاییهای فیثاغورسی این است که (p,q,r) سه‌تایی فیثاغورسی است اگر و تنها اگر عددهایی طبیعی مانند k، m و n موجود باشند به‌طوری‌که m و n نسبت به‌هم اول باشند، یکی از دو عدد m و n زوج و دیگری فرد باشد و

$$p=۲kmn,\quad q=k(m^۲-n^۲),\quad r=k(m^۲+n^۲)$$

اگر $(p,q,r) = (x+y, x+z, y+z)$، آنگاه

$$x+y = ۲kmn, \quad x+z = k(m^۲ - n^۲), \quad y+z = k(m^۲ + n^۲)$$

اینک اگر x، y و z هر سه فرد باشند، آنگاه $x+z$ زوج است و در نتیجه $k(m^۲ - n^۲)$ عددی صحیح و زوج است. از طرفی زوجیت m و n متفاوت و در نتیجه $m^۲ - n^۲$ فرد است. بنابراین k باید زوج باشد.

در این حالت،

$$\frac{۱}{۲}[(x+y)+(x+z)-(y+z)] = \frac{۱}{۲}[۲kmn + k(m^۲ - n^۲) - k(m^۲ + n^۲)]$$

$$x = k(mn - n^۲)$$

که بازهم برابری بین دو عدد صحیح است یکی فرد و یکی زوج.

بنابر گفته دکتر والتر انگیزهٔ در نظر گرفتن عبارت طرف چپ این معادله این نتیجه است که

$$\frac{۱}{۲}[\text{وتر} - \text{مجموع دو ساق}]$$

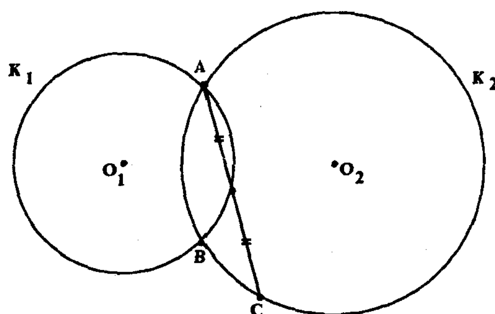
برابر با شعاع دایرهٔ محاطی در مثلث فیثاغورسی است (مثلث فیثاغورسی، مثلثی قائم‌الزاویه است که طول ضلعهایش عددهایی صحیح‌اند) و می‌دانیم که چنین شعاعی باید عددی صحیح باشد.

مسأله‌ای از المپیاد بالکان، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۲۹۰)

مسأله‌ای از بلغارستان

دو دایرهٔ K_1 و K_2 به‌ترتیب به مرکز O_1 و O_2 و به شعاع ۱ و $\sqrt{2}$ در نقاط A و B متقاطع‌اند. AC وتری از K_2 است که K_1 آن‌را نصف کرده است. با فرض اینکه فاصلهٔ O_1 تا O_2 برابر با ۲ واحد است طول AC را به‌دست آورید.



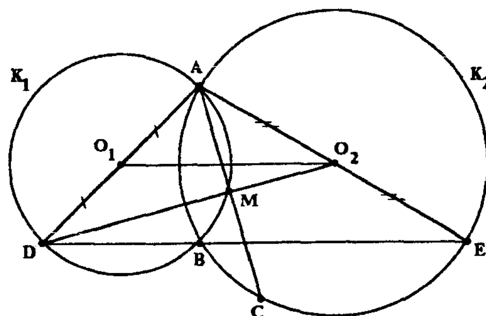
شکل۴۹

راه‌حل

به‌طور کلی، هنگامی‌که دو دایره متقاطع‌اند یکی از ایده‌های مناسب این است که به قطرهایی که از یکی از نقاط برخورد می‌گذرند توجه کنیم، زیرا پاره‌خطی که دو سر دیگر این قطرها را به‌هم وصل می‌کند از نقطهٔ برخورد دیگر دایره‌ها می‌گذرد. بنابراین در شکل ۵۰، DE از B می‌گذرد (زیرا در هر دو دایره زاویه‌های محاطی به رأس B و مقابل به قطرهای دایره‌ها قائمه‌اند). همچنین پاره‌خط O_1O_2 که مرکزها

را به‌هم وصل می‌کند وسط ضلعهای AD و AE از مثلث ADE را نیز به‌هم متصل می‌کند، و در نتیجه طولش برابر با نصف DE است. چون $O_۱O_۲ = ۲$، پس $DE = ۴$ و به این ترتیب طول هر سه ضلع مثلث ADE را می‌دانیم:

$$AD = ۲,\ \ AE = ۲\sqrt{۲},\ \ DE = ۴$$



شکل ۵۰

اگر $DO_۲$ دایرهٔ $K_۱$ را در M قطع کند، مثلث AMD قائم‌الزاویه می‌شود، و در نتیجه پاره‌خط $O_۲M$ که از مرکز $K_۲$ می‌گذرد بر وتر AMC عمود است. بنابراین M وسط این وتر است و در حقیقت AC همان وتری است که می‌خواهیم طولش را بیابیم. چون $AC = ۲AM$، طول AM را به‌دست می‌آوریم.

از آنجا که AM ارتفاع $\triangle ADO_۲$ است، پس

$$\text{مساحت}\ \triangle ADO_۲ = \frac{۱}{۲}DO_۲ \times AM$$

و در نتیجه

$$AM = \frac{۲(\text{مساحت}\ \triangle ADO_۲)}{DO_۲}$$

اکنون، $DO_۲$ میانهٔ $\triangle ADE$ است و در نتیجه مساحت $\triangle ADE$ را نصف می‌کند. بنابراین

$$AM = \frac{\text{مساحت}\ \triangle ADE}{DO_۲}$$

در اینجا بخش عمدهٔ مسأله حل شده است، زیرا مساحت و طول میانه با دانستن اندازهٔ سه ضلع مثلث به‌سادگی حساب می‌شوند.

الف) نصف محیط $\triangle ADE$ برابر است با $s = \frac{۱}{۲}(۲ + ۲\sqrt{۲} + ۴) = ۳ + \sqrt{۲}$ و در نتیجه بنابر دستور هرون،

$$\text{مساحت}\ \triangle ADE = \sqrt{(۳+\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})(-۱+\sqrt{۲})} = \sqrt{۷}$$

ب) با استفاده از قانون کسینوسها در $\triangle ADE$ به‌دست می‌آوریم

$$\cos A = \frac{AD^۲ + AE^۲ - DE^۲}{۲AD \times AE}$$
$$= \frac{۴ + ۸ - ۱۶}{۸\sqrt{۲}} = -\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

به همین ترتیب، با استفاده از قانون کسینوسها در $\triangle ADO_۲$،

$$DO_۲^۲ = AD^۲ + AO_۲^۲ - ۲AD \times AO_۲ \cos A$$
$$= ۴ + ۲ + ۴\sqrt{۲} \times \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = ۸$$

و در نتیجه

$$DO_۲ = \sqrt{۸}$$

در نهایت

$$AM = \frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۸}}$$

و در نتیجه

$$AC = ۲AM = \sqrt{\frac{۷}{۲}}$$

مسائلی از دوره‌های مختلف مسابقات کورشاک

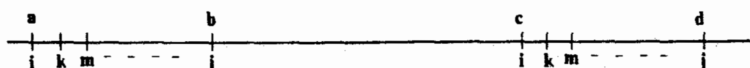
۱. مسأله‌ای از مسابقهٔ سال ۱۹۸۲

(راه‌حل دیگری در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۹، ۲۲۸ آمده است.)

فرض کنید هریک از عددهای صحیح را با یکی از ۱۰۰ رنگ مختلف طوری رنگ‌آمیزی کرده‌ایم که

الف) هر کدام از این ۱۰۰ رنگ واقعاً به‌کار رفته است، و

ب) در صورتی که طول دو بازه مانند $[a, b]$ و $[c, d]$، که نقاط انتهایی آنها عددهایی صحیح‌اند، برابر باشد، و هر دو از طرف چپ همرنگ باشند (یعنی a و c همرنگ باشند) و هر دو از طرف راست همرنگ باشند (یعنی b و d همرنگ باشند؛ ممکن است این رنگ با رنگ a و c یکی باشد یا نباشد)، آنگاه، هر دو بازه با همین رنگ رنگ‌آمیزی شده باشند؛ یعنی، به‌ازای هر عدد صحیح مانند x در فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant b-a$، دو عدد $a+x$ و $c+x$ همرنگ باشند.



شکل ۵۱

ثابت کنید که عددهای ۱۹۸۲− و ۱۹۸۲+ باید رنگهای مختلفی داشته باشند.

راه‌حل

قسمت ۱

جفتی از عددهای صحیح را که رنگ یکسانی دارند جفتی **تکرنگ** و فاصلهٔ بین آنها را فاصله‌ای تکرنگی می‌نامیم. دو جفت تکرنگ مانند (a, b) و (c, d) به‌ترتیب به رنگهای i و j در نظر بگیرید، i و j یکسان‌اند یا متفاوت، به‌طوری که فاصلهٔ تکرنگی هر دو برابر با s باشد (شکل ۵۲ را ببینید). در این

حالت طول بازه‌های $[a,c]$ و $[b,d]$ برابر است و این دو بازه در شرط (ب) که در صورت مسأله آمده است صدق می‌کنند، و در نتیجه رنگ‌آمیزی هر دو بازه یکسان است. بنابراین،

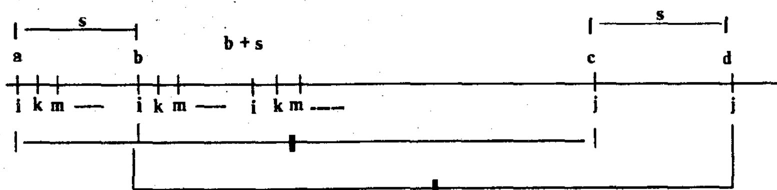
عددهای $a+1$ و $b+1$ باید همرنگ باشند (به رنگ k)،

عددهای $a+2$ و $b+2$ باید همرنگ باشند (به رنگ m)،

. . . .

عددهای b و $b+s$ باید همرنگ باشند (بازهم به رنگ i)

عددهای $b+1$ و $b+s+1$ باید همرنگ باشند (بازهم به رنگ k) و الی آخر.



شکل۵۲

بنابراین $[a,c]$ باید با بلوکهای مجاور هم به‌طول s که رنگ‌آمیزی آنها درست مانند رنگ‌آمیزی بازهٔ $[a,b]$ است رنگ شده باشد. (اگر طول $[a,c]$ برابر با $q\times s+r$ باشد، که در آن $0 \leqslant r < s$، چنین بلوکهایی q بار در $[a,c]$ وجود دارند و به‌دنبال آنها r عدد صحیح قرار دارند که به‌عنوان بخشی از بلوک در انتها قرار دارند.)

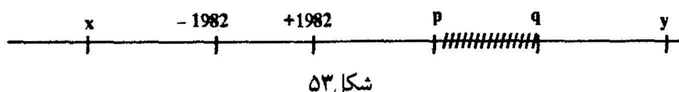
قسمت ۲

از آنجا که تنها ۱۰۰ رنگ وجود دارد، بنابر اصل لانه‌کبوتری هر بازه‌ای متشکل از ۱۰۱ عدد صحیح باید شامل دو عدد صحیح همرنگ باشد. چون ۱۰۱ عدد صحیح متوالی بازه‌ای به‌طول ۱۰۰ را اشغال می‌کنند، پس هر بازه‌ای به‌طول ۱۰۰ دست‌کم یک فاصلهٔ تکرنگی مانند d در مجموعهٔ محدود $\{1, 2, \cdots, 100\}$ ایجاد می‌کند. از این‌رو، هر بازهٔ نامتناهی روی محور اعداد که شامل تعداد بی‌شماری از زیربازه‌های مجاور هم به‌طول ۱۰۰ است، بی‌نهایت فاصلهٔ تکرنگی کراندار از این نوع پدید می‌آورد. در نتیجه دست‌کم یکی از این فاصله‌ها باید بی‌نهایت بار در این بازه تکرار شود.

قسمت ۳

از آنجا که هریک از ۱۰۰ رنگ واقعاً به‌کار رفته است، به‌ازای هر رنگ عدد صحیحی به همان رنگ انتخاب و فرض می‌کنیم که $[p,q]$ بازه‌ای متناهی باشد که شامل همهٔ این عددهای صحیح است. فرض کنید $[x,y]$ بازه‌ای باشد که شامل هر دو بازهٔ $[p,q]$ و $[-1982, +1982]$ است (ممکن است

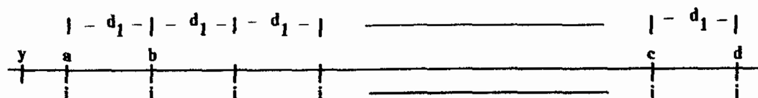
بازهٔ دوم در بازهٔ اول قرار داشته باشد) و نیز در دو طرف این بازه‌ها شامل محدوده‌ای از دست‌کم ۱۰۰ عدد صحیح است (شکل ۵۳ را ببینید).



شکل۵۳

بنابر قسمت (۲) در بالا، بازهٔ نامتناهی $[y, \infty)$ فاصله‌ای تکرنگی مانند d_1 پدید می‌آورد که بی‌نهایت بار ظاهر می‌شود، و به همین ترتیب بازهٔ $(-\infty, x]$ فاصله‌ای تکرنگی مانند d_2 دارد که بی‌نهایت بار ظاهر می‌شود. همچنین d_1 و d_2 هر دو در مجموعهٔ $\{1, 2, \cdots, 100\}$ قرار دارند.

اینک فرض کنید (a, b) و (c, d) دو جفت تکرنگ در $[y, \infty)$ به فاصلهٔ d_1 باشند. از آنجا که بی‌نهایت بازه از این نوع در $[y, \infty)$ وجود دارد، می‌توانیم دو بازهٔ مجزا از اینها را طوری انتخاب کنیم که فاصله‌شان از یکدیگر به‌اندازهٔ دلخواه زیاد باشد. همان‌طور که در قسمت (۱) در بالا ثابت کردیم، عددهای صحیح بین $[a, b]$ و $[c, d]$ به‌صورت بلوکهایی متوالی به رنگهای بازهٔ $[a, b]$ رنگ‌آمیزی شده‌اند. بنابراین، اگر $[a, b]$ و $[c, d]$ را به‌اندازهٔ کافی دور از هم انتخاب و چنین بلوکهای مجاوری به‌طول d_1 را با هم ترکیب کنیم، می‌بینیم که در بازهٔ نامتناهی $[y, \infty)$، فاصله‌های تکرنگیی برابر با هر مضرب متناهی از d_1 مانند kd_1 وجود دارد (شکل ۵۴ را ببینید). به همین ترتیب در بازهٔ $(-\infty, x]$ فاصله‌های تکرنگیی وجود دارد که طول آنها برابر است با همهٔ مضربهای متناهی فاصلهٔ d_2 که در آن بی‌نهایت بار ظاهر شده است.

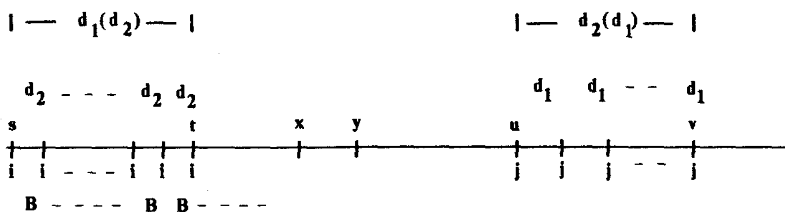


شکل۵۴

از اینجا نتیجه می‌شود که مضرب تکرنگی $d_1 \times d_2$، در $[y, \infty)$ و نیز مضرب تکرنگی برابر با آن، یعنی $d_2 \times d_1$، در $(-\infty, x]$ وجود دارد، و در نتیجه دو جفت تکرنگ (s, t) و (u, v) موجودند که فاصلهٔ هریک از آنها برابر با $d_1 d_2$ است و در دو طرف بازهٔ $[x, y]$ قرار دارند (شکل ۵۵ را ببینید).

قسمت ۴

از بحث بالا نتیجه می‌شود که طول بازه‌های $[s, u]$ و $[t, v]$ یکی است و، بنابر شرط (ب)، با یک رنگ رنگ‌آمیزی شده‌اند. همان‌طور که در قسمت (۱) در بالا گفتیم، عددهای صحیحی که از s آغاز می‌شوند، با تکرار رنگهای بلوک $[s, t]$ و به‌صورت بلوکهای مجاور هم رنگ‌آمیزی شده‌اند ولی $[s, t]$

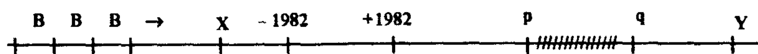


$(d_2 \leq 100)$

شکل۵۵

با کنار هم قرار دادن d_1 نسخه از بلوک B به‌طول d_2 رنگ‌آمیزی شده است. بنابراین، در سرتاسر بازهٔ $[s,u]$، رنگ‌آمیزی به‌وسیلهٔ کنار هم قرار دادن نسخه‌های بلوک B انجام شده است.

از آنجا که s و u در دو طرف بازهٔ $[x,y]$ قرار دارند، تمام بازهٔ $[x,y]$ به‌وسیلهٔ کنار هم قرار دادن نسخه‌های B رنگ‌آمیزی شده است و در نتیجه رنگهایی که در $[x,y]$ وجود دارند از رنگهای B هستند. ولی $[x,y]$ شامل $[p,q]$ است که خود ۱۰۰ رنگ را دربر دارد. در نتیجه، B باید شامل تمام رنگها باشد و چون طول این بازه برابر با d_2 است و $d_2 \leqslant ۱۰۰$، نتیجه می‌گیریم که $d_2 = ۱۰۰$، و بنابراین B ترتیب ثابتی از ۱۰۰ رنگ مختلفی است که در اختیار داریم.



شکل۵۶

چون $[x,y]$، که شامل بازهٔ $[-۱۹۸۲, +۱۹۸۲]$ و محدوده‌ای از دست‌کم ۱۰۰ عدد صحیح در دو طرف آن است، به‌وسیلهٔ این نسخه‌های مجاور هم B رنگ‌آمیزی شده است، پس رنگی که در مورد عدد ۱۹۸۲− به‌کار رفته است و در بازهای ۱۰۰تایی وجود دارد، باید در عددهای صحیح زیر نیز یافت شود

$$-۱۸۸۲, -۱۷۸۲, \cdots, -۸۲, ۱۸, ۱۱۸, \cdots, ۱۹۱۸, ۲۰۱۸,$$

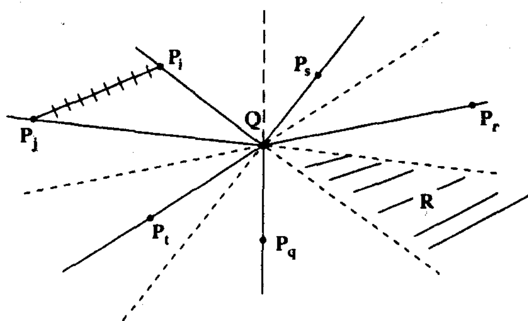
ولی این رنگ در هیچ عدد صحیحی بین آنها و به‌ویژه در عدد ۱۹۸۲+ وجود ندارد.

۲. مسأله‌ای از مسابقهٔ سال ۱۹۸۳

n نقطهٔ P_1، P_2، $\cdots$ و P_n و نیز نقطهٔ Q در صفحه مفروض‌اند. اگر این نقطه‌ها طوری قرارگرفته باشند که به‌ازای هر جفت مانند (P_i, P_j) نقطهٔ سومی مانند P_k موجود باشد به‌طوری‌که مثلث $P_iP_jP_k$ کامل شده و نقطهٔ Q را درون خود داشته باشد، ثابت کنید که n باید فرد باشد.

راه‌حل

فرض کنید n نیمخط QP_1، QP_2، $\cdots$ و QP_n با رنگ آبی و تصویر آنها تحت نیمدور حول نقطهٔ Q با رنگ قرمز رنگ‌آمیزی شده باشد (در شکل ۵۷ تصویر نیمخطها به‌صورت نقطه‌چین رسم شده است). بدیهی است که این n نیمخط آبی به‌همراه تصویرهای قرمز نظیرشان n خط راست تشکیل می‌دهند.



شکل۵۷

اینک فرض کنید در بادبزنی که دور نقطهٔ Q درست شده است، دو نیمخط آبی مانند QP_i و QP_j پشت‌سرهم آمده باشند. در این حالت نقطهٔ P_k که مثلث $P_iP_jP_k$ را کامل می‌کند و نقطهٔ Q درون آن قرار می‌گیرد، باید در R، یعنی ناحیهٔ بین تصویرهای قرمز رنگ QP_i و QP_j، قرار داشته باشد. ولی چون این تصویرهای قرمز در بادبزن پشت‌سرهم‌اند، هیچ نیمخط آبی بین آنها قرار ندارد و در نتیجه، برخلاف فرض مسأله، هیچ نقطه‌ای مانند P_k وجود ندارد که جفت (P_i, P_j) را کامل کند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که هیچ دو نیمخط آبی در بادبزن پشت‌سرهم نیستند.

اینک، فرض کنید همهٔ خطهای شکل را حذف و بعد شروع کنیم به اینکه دوباره آنها را به ترتیبی تک‌تک به شکل بازگردانیم. فرض کنید که در هر مرحله از این کار، با رشد تدریجی بادبزن، حساب تعداد جفت نیمخطهای آبی، b، را نگه داریم. هنگامی‌که l، تعداد خطها، ۲ است، بدیهی است که b باید برابر با ۱ باشد (شکل ۵۸ را ببینید). از این مرحله به بعد، فقط سه روش وجود دارد که بتوانیم خطی را به پیکربندی بیفزاییم:

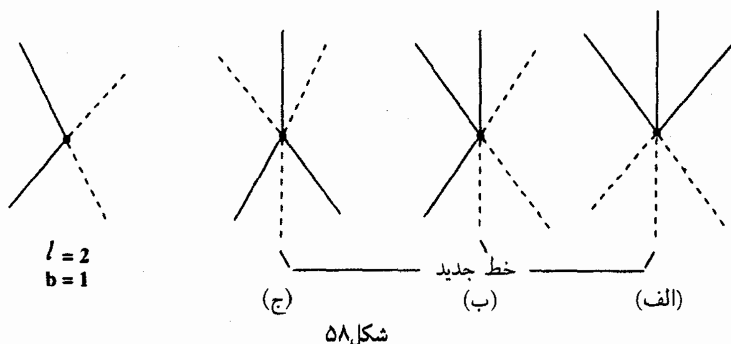
نیمخط آبی مربوط به خط جدید باید به یکی از صورتهای زیر در بادبزن قرارگیرد:

الف) بین دو نیمخط آبی متوالی،

ب) بین نیمخطی آبی و نیمخطی قرمز،

ج) بین دو نیمخط قرمز متوالی.

با توجه به شکل ۵۸ به آسانی نتیجه می‌شود که



شکل۵۸

در حالت (الف)، b به $b + ۱$ افزایش می‌یابد زیرا دو جفت آبی متوالی پدید می‌آید، درحالی‌که جفتی دیگر از بین می‌رود؛

در حالت (ب)، بازهم با پدید آمدن یک تک‌جفت آبی جدید، b به $b + ۱$ افزایش می‌یابد؛

در حالت (ج)، b به $b - ۱$ کاهش می‌یابد، زیرا یک جفت آبی متوالی به‌وسیلهٔ نیمخط قرمز خط جدید از بین می‌رود.

بنابراین، در هر مرحله زوجیت b تغییر می‌کند. چون تعداد خطها نیز از l به $l + ۱$ تبدیل می‌شود، در هر مرحله، زوجیت هر دو l و b تغییر می‌کند. بنابراین یا زوجیت l و b در تمام مراحل این فرایند یکسان است و یا در تمام مراحل زوجیتشان مخالف هم است. چون وقتی $l = ۲$، $b = ۱$، پس زوجیتشان همیشه مخالف هم است.

بنابراین، در پایان فرایند جایگزینی مجدد، زوجیت عددهای n و b باید مخالف هم باشد. ولی ثابت کردیم که در این مرحله هیچ زوج متوالی از نیمخطهای آبی در بادبزن وجود ندارد. بنابراین در شکل موردنظر $b = ۰$، یعنی b عددی زوج است و در نتیجه n باید زوج باشد. ■

این بخش را با آوردن سه مسألهٔ مسابقهٔ سال ۱۹۸۵ به پایان می‌بریم.

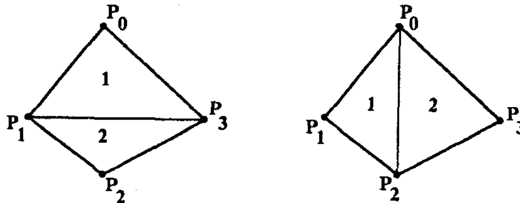
۳. مسألهٔ ۱

(راه حل دیگری برای این مسأله در ۱۹۹۱، ۱۳۴ آمده است.)

$(n + ۱)$ضلعی محدبی مانند $P = P_۰P_۱ \cdots P_n$ با ترسیم $n - ۲$ قطر نامتقاطع از آن به $n - ۱$ مثلث افراز شده است. ثابت کنید می‌توانیم این مثلثها را با شماره‌های ۱، ۲، $\cdots$ و $n - ۱$ طوری شماره‌گذاری کنیم که P_i $(i = ۱, ۲, \cdots, n - ۱)$یکی از رأسهای مثلث i باشد.

راه‌حل

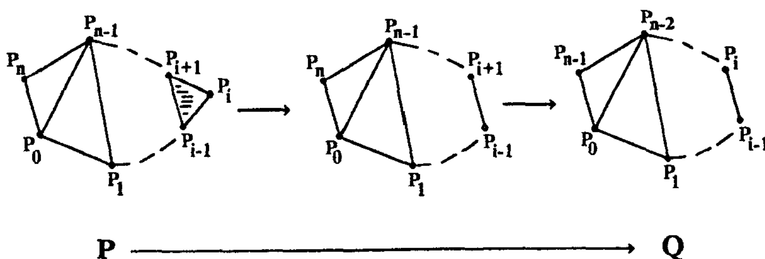
از آنجا که برای مثلث‌بندی چهارضلعی تنها دو روش وجود دارد، با توجه به شکلهای زیر روشن است که به‌ازای $n = ۳$ می‌توانیم شماره‌گذاری مطلوب را انجام دهیم.



شکل۵۹

چون طبیعت مسأله می‌طلبد که برای اثبات حکم آن از روش استقرا استفاده کنیم، پس فرض می‌کنیم شماره‌گذاری مطلوب در مورد هر چندضلعی محدب مانند $P_۰P_۱\cdots P_{n-۱}$، که در آن $n - ۱ \geqslant ۳$، امکان‌پذیر باشد و سپس توجه خود را به $(n + ۱)$ضلعی $P = P_۰P_۱\cdots P_n$ معطوف می‌کنیم. به‌طور کلی، به روشهای بسیاری می‌توانیم چندضلعی را با قطرهای نامتقاطعش مثلث‌بندی کنیم، و باید ثابت کنیم که در هر حالت شماره‌گذاری مطلوب امکان‌پذیر است (در $(n + ۱)$ضلعی، تعداد مثلث‌بندیهای مختلف برابر است با $(n - ۱)$اُمین عدد کاتالان، یعنی $c_{n-۱} = \frac{۱}{n}\binom{۲n-۲}{n-۱}$).

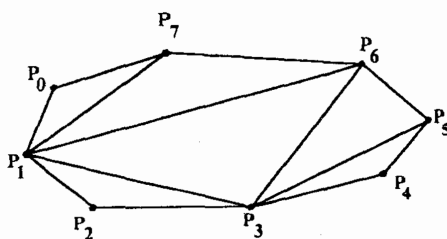
برای استفاده از فرض استقرا، نیازمند روشی هستیم که با آن بتوانیم $(n + ۱)$ضلعی مفروض P را به nضلعی محدبی مانند Q تبدیل کنیم. یکی از حالتهای خوب حالتی است که یکی از قطرها رأسی مانند P_i را از بقیهٔ رأسها جدا کند. در این حالت تبدیل مناسب با حذف کردن مثلث $P_{i-۱}P_iP_{i+۱}$ به‌دست می‌آید. در این صورت قطر $P_{i-۱}P_{i+۱}$ ضلعی از چندضلعی جدید Q است. به‌طور کلی، برای استفاده از فرض استقرا، باید همان‌طور که دورتادور Q را طی می‌کنیم، رأسهای $P_{i+۱}$، $P_{i+۲}$، $\cdots$ و P_n را که پس از $P_{i-۱}$ قرار دارند با نامهای P_i، $P_{i+۱}$، $\cdots$ و $P_{n-۱}$ مجدداً نامگذاری کنیم.



شکل۶۰

در صورتی که رأس حذف شده یکی از دو رأس $P_\circ$ و P_n باشد، باید این فرایند نامگذاری مجدد را اصلاح کنیم. با وجود این، همان‌طور که ثابت خواهیم کرد، همواره می‌توانیم از روی دادن این پیشامدها جلوگیری کنیم، زیرا در هر مثلث‌بندی دست‌کم یک قطر وجود دارد که رأسی را که نه $P_\circ$ است و نه P_n از بقیه جدا می‌کند.

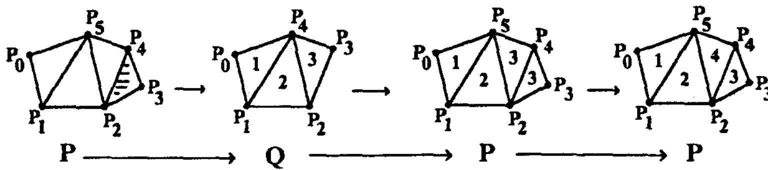
بدیهی است که هر ضلع چندضلعی P به یکی از مثلثهای موجود در مثلث‌بندی تعلق دارد و درحالی که ممکن است هر سه ضلع مثلثی قطرهای چندضلعی باشند، هیچ مثلثی بیش از دو ضلع P را شامل نمی‌شود (به‌یاد آورید که $n - ۱ \geqslant ۳$ و در نتیجه P مثلث نیست). بنابراین $n + ۱$ ضلع P باید بین $n - ۱$ مثلث یا کمتر از آن توزیع شود، و در نتیجه دست‌کم در دو جا باید مثلثی وجود داشته باشد که شامل دو ضلع P است. از آنجا که چنین ضلعهایی در P مجاورند، دست‌کم دو قطر وجود دارد که هریک از آنها رأسی را از P جدا می‌کند، و چون قطرها نامتقاطع‌اند هیچ دو رأس جدا شده‌ای در P مجاور نیستند. بنابراین دست‌کم یکی از دو رأس جدا شده یا بیشتر از آن به جفت مجاور $(P_\circ, P_n)$ تعلق ندارد. پس نتیجه می‌شود هر مثلث‌بندی را که به‌کار برده باشیم همواره می‌توانیم $(n + ۱)$ضلعی مفروض P را به nضلعی محدب $Q = P_\circ P_۱ \cdots P_{n-۱}$ تبدیل کنیم که در آن رأسهای $P_{i+۱}$، $\cdots$ و P_n که پس از رأس حذف شدهٔ P_i قرار دارند و هیچ‌کدام از آنها $P_\circ$ یا P_n نیست، به‌ترتیب به‌صورت P_i، $\cdots$ و $P_{n-۱}$ مجدداً نامگذاری شده‌اند.



شکل۶۱

با استفاده از فرض استقرا فرض می‌کنیم که مثلثهای Q طوری شماره‌گذاری شده‌اند که هریک از رأسهای $P_۱$، $P_۲$، $\cdots$ و $P_{n-۲}$ به‌ترتیب رأسی از مثلث ۱، ۲، $\cdots$ و $n - ۱$ در Q هستند. چون رأس حذف شده، P_i، نه $P_\circ$ است و نه P_n، i باید یکی از عددهای ۱، ۲، $\cdots$ و $n - ۱$ باشد. حال فرض کنید که شمارهٔ مثلثهای Q را به P منتقل کنیم و به مثلث محذوف $P_{i-۱}P_iP_{i+۱}$، i را نسبت دهیم. اگر $i = n - ۱$، آنگاه با تخصیص شمارهٔ $n - ۱$ به این مثلث بازگردانده شده، شماره‌گذاری مثلثها همان‌طور که می‌خواستیم از ۱ تا $n - ۱$ کامل شده است. در غیر این صورت $i \leqslant n - ۲$ و در نتیجه با این مشکل روبه‌رو می‌شویم که دو مثلث با شمارهٔ i وجود دارد و هیچ مثلثی با شمارهٔ $n - ۱$ وجود ندارد.

برای رفع این مشکل مثلثهای i، $i+۱$، $\cdots$ و $n-۲$ در Q را به‌ترتیب با عددهای $i+۱$، $i+۲$،$\cdots$ و $n-۱$ مجدداً شماره‌گذاری می‌کنیم. در این صورت، Q مستقیماً مثلثهای ۱، ۲، $\cdots$ و $i-۱$ را شماره‌گذاری می‌کند، مثلث حذف شده شمارهٔ i خواهد داشت و بقیهٔ مثلثهای Q، با افزایش ۱ واحد به شماره‌هایشان، مثلثهای $i+۱$، $i+۲$، $\cdots$ و $n-۱$ را شماره‌گذاری می‌کنند. به‌یاد آورید که هنگام ساختن Q، به‌ازای $k \in \{i+۱, i+۲, \cdots, n\}$، رأس P_k در P را به صورت $P_{k-۱}$ مجدداً نامگذاری کردیم. بنابراین، هرچندکه مثلثها در Q طوری شماره‌گذاری شده‌اند که $P_{k-۱}$ رأسی از مثلث $k-۱$ شود، هنگام انتقال شماره‌ها به P، رأس P_k ($k \geqslant i+۱$) به مثلث P_k مربوط می‌شود. بنابراین، افزایش شمارهٔ این مثلثها از $k-۱$ به k، وابستگی P_k به مثلث k را دوباره برقرار می‌کند.



شکل۶۲

پس بنابر استقرا نتیجه می‌شود که شماره‌گذاری مطلوب همواره امکان‌پذیر است.

۴. مسألهٔ ۲

فرض کنید n عددی طبیعی باشد. به‌ازای هر مقسوم‌علیه اول n مانند p، بزرگترین توان p را در نظر بگیرید که از n بیشتر نیست. فرض کنید مجموع همهٔ این بزرگترین توانها را مجموع توانی n بنامیم و آن‌را با $S(n)$ نشان دهیم. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی مانند n وجود دارد که از مجموع توانی خود کمترند، به عبارت دیگر، $n < S(n)$.

راه‌حل

هیچ‌گاه نمی‌توان گفت مسأله‌ای به‌ظاهر ساده از نظریهٔ اعداد چقدر ممکن است دشوار باشد، و مسأله‌ای درکورشاک از این نوع همواره دردسری بزرگ است. با وجود این، مسألهٔ حاضر استثنائاً راه‌حلی سرراست و ساده دارد، زیرا به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، عدد $n = ۲^{k+۱} + ۲$ در شرط $S(n) > n$ صدق می‌کند. چون

$$n = ۲^{k+۱} + ۲ = ۲(۲^k + ۱)$$

n شامل عامل فرد $۲^k + ۱$ است که دست‌کم برابر با ۳ است، پس n باید شامل مقسوم‌علیه اول فردی

مانند q باشد که آن‌هم دست‌کم برابر با ۳ است. در نتیجه

$$S(۲^{k+۱}+۲) \geqslant ۲^{k+۱}+q^{۱} \geqslant ۲^{k+۱}+۳ > ۲^{k+۱}+۲$$

و حکم به‌سادگی نتیجه می‌شود.

تقریباً به‌همین سادگی می‌توان تحقیق کرد که وقتی $n = ۲p$، که در آن p عددی اول و فرد است، بازهم شرط $S(n) > n$ برقرار است.

بزرگترین ۲^tای که از عدد زوج n بیشتر نیست همواره از نصف آن عدد بزرگتر است:

> اگر غیر از این باشد، یعنی $\frac{n}{۲} \geqslant ۲^t$، آنگاه $n \geqslant ۲^{t+۱}$ که با فرض ماکسیمم بودن ۲^t تناقض دارد.

پس به‌ازای $n = ۲p$، بزرگترین ۲^tای که از n بیشتر نیست باید از p بزرگتر باشد:

$$۲^t > p$$

چون p عددی اول و فرد است، پس $۲p < pp = p^۲$ و در نتیجه بزرگترین توان p که از n بیشتر نیست خود p است. در نتیجه

$$S(n) = S(۲p) = ۲^t + p > p + p = ۲p = n$$

که همان نتیجهٔ مطلوب است.

تذکرات

بدیهی است که وقتی $n = p$، که در آن p عددی اول است، نتیجه می‌شود $S(n) = n$ و در نتیجه بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که در برابری $S(n) = n$ صدق می‌کنند. به‌نظر می‌رسد که اثبات وجود بی‌نهایت جواب برای نابرابری $S(n) < n$ کوشش بیشتری می‌طلبد و آنچه در زیر آمده است گواهی بر این ادعاست.

بنابر اصل برتران، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geqslant ۲$، عدد اولی بین n و $۲n$ وجود دارد. فرض کنید p عددی اول و فرد و q عددی اول بین p و $۲p$ باشد. همان‌طورکه ثابت خواهیم کرد، نتیجه می‌شود که $S(pq) < pq$.

از نابرابریهای $p < q < ۲p$ نتیجه می‌گیریم $p^۲ < pq < ۲p^۲ < p^۳$، زیرا $p \geqslant ۳$، و در نتیجه معلوم می‌شود که $p^۲$ بزرگترین توان p است که از pq بیشتر نیست. همچنین، از نابرابریهای $pq < qq = q^۲$ نتیجه می‌شود بزرگترین توان q که از n بیشتر نیست خود q است. بنابراین

$$S(pq) = p^۲ + q$$

حال q هم عددی اول و فرد، و در نتیجه تفاضل $q-p$ دست‌کم برابر با ۲ است. بنابراین $q-p \geqslant ۲$، و در نتیجه

$$p(q-p) \geqslant ۲p > q$$

$$pq-p^۲ > q, \quad -pq+p^۲ < -q, \quad p^۲+q < pq$$

یعنی $S(pq) < pq$ و این همان نتیجهٔ مطلوب است.

۵. مسألهٔ ۳

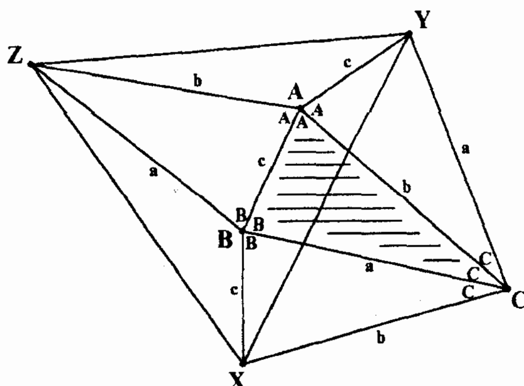
(راه‌حل دیگری برای این مسأله در ۱۹۹۰، ۶ آمده است.)

فرض کنید که هر رأس مثلث ABC نسبت به ضلع مقابلش بازتابیده شده و سه نقطهٔ X، Y و Z حاصل شده است. ثابت کنید مساحت مثلث XYZ هیچ‌گاه بیش از پنج برابر مساحت مثلث اصلی، ABC، نمی‌شود.

راه‌حل

فرض کنید مساحت مثلث ABC را با Δ نشان دهیم. از آنجا که بازتابها نسخه‌های XBC، YAC و ZAB از مثلث ABC را پدید می‌آورند، این مثلثها نیز مساحتهایی برابر با Δ دارند. حال می‌توان مساحت مثلث XYZ را برحسب مساحت این نسخه‌های مثلث ABC و مساحت سه مثلث «بیرونی» CXY، AYZ و BZX به‌صورت زیر نوشت (شکل ۶۳):

$$\text{مساحت } \triangle XYZ = \text{مساحت } \triangle ABC + \text{مساحت } \triangle YAC + \text{مساحت } \triangle ZAB$$
$$\pm \text{مساحت } \triangle CXY \pm \text{مساحت } \triangle BZX \pm \text{مساحت } \triangle AYZ$$
$$= ۴\Delta \pm \text{مساحت } \triangle CXY \pm \text{مساحت } \triangle BZX \pm \text{مساحت } \triangle AYZ$$



شکل۶۳

که در آن، هریک از سه مساحت آخر، بسته به شکل مثلث ABC، ممکن است افزوده یا کاسته شود. درحالتی که در شکل ۶۳ نشان داده شده است، باید دو مساحت اول افزوده و مساحت سوم کاسته شود.

از آنجا که هر زاویه‌ای از مثلث ABC مانند θ سه بار در رأسی به همین نام ظاهر می‌شود، با توجه به شکل ۶۳ معلوم می‌شود که وقتی $۳\theta > ۱۸۰^\circ$، مساحت مثلث مجاور بیرونی باید کاسته شود (در این حالت این مثلث باید بیرون $\triangle XYZ$ قرار گیرد)، وقتی‌که $۳\theta < ۱۸۰^\circ$، این مساحت باید افزوده شود (که در این حالت این مثلث درون $\triangle XYZ$ قرار می‌گیرد) و وقتی‌که $۳\theta = ۱۸۰^\circ$، این مثلث از بین می‌رود و مساحتش برابر با صفر می‌شود. با یادآوری دستور $\frac{۱}{۲}pq\sin R$ برای مساحت $\triangle PQR$ و اینکه $\sin(۳۶۰^\circ - ۳\theta) = -\sin ۳\theta$، در حالتی که در شکل نشان داده شده است، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \text{مساحت } \triangle XYZ &= ۴\triangle + \text{مساحت } \triangle AYZ + \text{مساحت } \triangle BZX - \text{مساحت } \triangle CXY \\ &= ۴\triangle + \frac{۱}{۲}bc\sin(۳۶۰^\circ - ۳A) + \frac{۱}{۲}ac\sin(۳۶۰^\circ - ۳B) - \frac{۱}{۲}ab\sin ۳C \\ &= ۴\triangle - \frac{۱}{۲}bc\sin ۳A - \frac{۱}{۲}ac\sin ۳B - \frac{۱}{۲}ab\sin ۳C \end{aligned}$$

درحقیقت این عبارت مساحت درست $\triangle XYZ$ را در تمام حالتها به‌دست می‌دهد:

وقتی $۳\theta < ۱۸۰^\circ$، که در این حالت باید مساحت مثلث بیرونی افزوده شود،
مقدار $\sin ۳\theta$ منفی و در نتیجه $-\sin ۳\theta$ مثبت است؛

و

وقتی $۳\theta > ۱۸۰$، با توجه به اینکه باید مساحت مثلث بیرونی کاسته شود،
مقدار $-\sin ۳\theta$ منفی است.

بنابراین، برای اینکه ثابت کنیم مساحت مثلث XYZ هیچ‌گاه از $۵\triangle$ بیشتر نمی‌شود، باید نابرابری

$$-\frac{۱}{۲}bc\sin ۳A - \frac{۱}{۲}ac\sin ۳B - \frac{۱}{۲}ab\sin ۳C < \triangle$$

یا یکی از صورتهای معادلش در زیر را ثابت کنیم:

$$\frac{۱}{۲}bc\sin ۳A + \frac{۱}{۲}ac\sin ۳B + \frac{۱}{۲}ab\sin ۳C > -\triangle$$

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۲}bc(۳\sin A - ۴\sin^۳ A) &+ \frac{۱}{۲}ac(۳\sin B - ۴\sin^۳ B) \\ &+ \frac{۱}{۲}ab(۳\sin C - ۴\sin^۳ C) > -\triangle \end{aligned}$$

$$۳\triangle - ۴\triangle\sin^۲ A + ۳\triangle - ۴\triangle\sin^۲ B + ۳\triangle - ۴\triangle\sin^۲ C > -\triangle$$

$$۱۰\triangle > ۴\triangle(\sin^۲ A + \sin^۲ B + \sin^۲ C)$$

$$\frac{۵}{۲} > \sin^۲ A + \sin^۲ B + \sin^۲ C$$

که خود مسأله‌ای جالب توجه است.

به‌عنوان نخستین گام در اثبات آخرین نابرابری ثابت می‌کنیم

$$\sin^۲ A + \sin^۲ B + \sin^۲ C = ۲ + ۲\cos A \cos B \cos C$$

روشن است که

$$\begin{aligned}\sin^۲ A + \sin^۲ B + \sin^۲ C &= ۱ - \cos^۲ A + ۱ - \cos^۲ B + \sin^۲ C \\ &= ۲ + (\sin^۲ C - \cos^۲ A - \cos^۲ B)\end{aligned}$$

بنابراین، برای اثبات نخستین گام باید ثابت کنیم

$$۲\cos A \cos B \cos C = \sin^۲ C - \cos^۲ A - \cos^۲ B$$

با توجه به اینکه

$$۲\cos\theta\cos\phi = \cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi), \quad A + B + C = ۱۸۰^\circ$$

نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}۲\cos A \cos B \cos C &= [\cos(A+B) + \cos(A-B)]\cos C \\ &= \cos(۱۸۰^\circ - C)\cos C + \cos(A-B)\cos C \\ &= -\cos^۲ C + \cos(A-B)\cos[۱۸۰^\circ - (A+B)] \\ &= -\cos^۲ C - \cos(A-B)\cos(A+B) \\ &= -\cos^۲ C - \frac{۱}{۲}[۲\cos(A+B)\cos(A-B)] \\ &= -\cos^۲ C - \frac{۱}{۲}(\cos ۲A + \cos ۲B) \\ &= -\cos^۲ C - \frac{۱}{۲}(۲\cos^۲ A - ۱ + ۲\cos^۲ B - ۱) \\ &= -\cos^۲ C - \cos^۲ A - \cos^۲ B + ۱ \\ &= (۱ - \cos^۲ C) - \cos^۲ A - \cos^۲ B \\ &= \sin^۲ C - \cos^۲ A - \cos^۲ B\end{aligned}$$

که همان نتیجهٔ مطلوب است.

برای اینکه کار را تمام کنیم باید ثابت کنیم

$$۲ + ۲\cos A \cos B \cos C < \frac{۵}{۲}$$

به‌عبارت دیگر

$$۲\cos A \cos B \cos C < \frac{۱}{۲}$$

همان‌طور که در بالا گفتیم

$$۲\cos A\cos B\cos C = [\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cos C$$

حال، A، B و C زاویه‌های مثبتی هستند که مجموعشان برابر با ۱۸۰° است. فرض کنید دو تا از آنها، مثلاً A و B، نابرابر باشند. در این صورت، این مقادیر A، B و C، بیشترین مقدار ممکن

$$[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cos C$$

را به‌دست نمی‌دهند، زیرا به‌ازای مجموعهٔ مقادیر (A', B', C') که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$A' = B' = \frac{A+B}{۲},\ C' = C$$

مقدار $\cos(A'+B')$ و $\cos C'$ به‌ترتیب با مقادیر $\cos(A+B)$ و $\cos C$ برابرند ولی مقدار جملهٔ باقی‌مانده به $\cos(A'-B') = \cos ۰ = ۱$ افزایش می‌یابد (در عبارت موردنظر مقدار $\cos(A-B)$ کمتر از ۱ است زیرا A و B نابرابرند). به‌همین ترتیب، از متقارن بودن عبارت $۲\cos A\cos B\cos C$ نتیجه می‌شود که در صورت نابرابر بودن دو مقدار از مقادیر A، B و C مقدار ماکسیمم این عبارت به‌دست نمی‌آید. چون بنابر پیوستگی این تابع اطمینان داریم که روی بازهٔ $۰ < A, B, C < ۱۸۰^\circ$ مقدار ماکسیممی را اتخاذ می‌کند، نتیجه می‌گیریم که

$$\max(۲\cos A\cos B\cos C) = ۲\cos ۶۰^\circ \cos ۶۰^\circ \cos ۶۰^\circ = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ = \frac{۱}{۴}$$

که خیلی پایینتر از سقف مطرح شده، یعنی $\frac{۱}{۲}$، قرار دارد و این نتیجه برهان را کامل می‌کند.

دو مسأله از مسابقهٔ ملی ریاضیات دورهٔ راهنمایی جمهوری خلق چین، ۱۹۸۶

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۳۰)

پرسشهایی در سطح دورهٔ راهنمایی عموماً چندان برای ما جالب توجه نیستند، ولی دو مسألهٔ زیر، به‌ویژه مسألهٔ اول، آنقدر جذاب‌اند که نمی‌توانم از ذکر آنها صرفنظر کنم.

مسأله ۱

طول ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهارضلعی $ABCD$ به‌ترتیب برابرند با ۱، ۹، ۸ و ۶. کدام‌یک از پاسخهای زیر پنج گزارهٔ زیر را به‌درستی توصیف می‌کند؟

یک) چهارضلعی $ABCD$ را می‌توان بر دایره‌ای محیط کرد؛

دو) چهارضلعی $ABCD$ را نمی‌توان در دایره‌ای محاط کرد؛

سه) راستای قطرهای AC و BD بر هم عمود نیستند؛

چهار) $\angle ADC \geqslant ۹۰^\circ$؛

پنج) $\triangle BCD$ متساوی‌الساقین است.

الف: (یک) درست است، (دو) نادرست است، (چهار) درست است

ب: (سه) درست است، (چهار) نادرست است، (پنج) درست است

ج: (سه) درست است، (چهار) نادرست است، (پنج) نادرست است

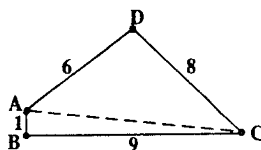
د: (دو) نادرست است، (سه) نادرست است، (چهار) درست است

راه‌حل

اگر گزاره‌ها و پاسخها را در جدولی جمع‌آوری کنیم، برای درک وضعیت موجود بسیار مفید است.

از جدول معلوم می‌شود که گزارهٔ (چهار) بیش از بقیه در پاسخها ظاهر می‌شود. بنابراین، کار خود را با بررسی گزارهٔ (چهار)، یعنی اینکه $\angle ADC \geqslant ۹۰^\circ$، آغاز می‌کنیم. در صورتی که $\angle ADC = ۹۰^\circ$،

	(یک)	(دو)	(سه)	(چهار)	(پنج)
الف	د	ن		د	
ب			د	ن	د
ج			د	ن	ن
د		ن	ن	د	

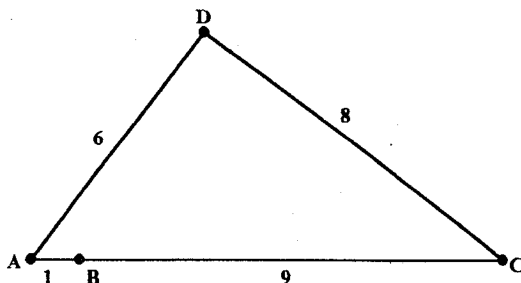


شکل۶۴

$\triangle ADC$ مثلثی قائم‌الزاویه با طول ضلعهای ۱۰–۸–۶ خواهد بود و طول وترش، AC، ۱۰ است. حال، قطعاً AC بزرگتر از ۱۰ نیست، زیرا از نابرابری مثلثی نتیجه می‌شود

$$AC \leqslant AB + BC = ۱ + ۹$$

بنابراین، اینکه $\angle ADC > ۹۰^\circ$ نامکن است و اگر (چهار) برقرار باشد، $\angle ADC$ دقیقاً برابر با ۹۰° و در نتیجه $\angle ABC$ نیمصفحه و نیز چهارضلعی $ABCD$ به مثلثی تبدیل می‌شود که B روی ضلع AC از آن واقع است (شکل ۶۵ را ببینید).



شکل۶۵

در نتیجه، دایره‌ای که از نقاط A، C و D می‌گذرد از B نمی‌گذرد و بنابراین گزارهٔ (دو) که می‌گوید چهارضلعی $ABCD$ محاطی نیست درست است. به عبارت دیگر، گزارهٔ (چهار) گزاره (دو) را نتیجه می‌دهد و بنابراین (الف) و (د) درست نیستند. بین دو پاسخ باقی‌مانده یکی مدعی است که (پنج) درست است و دیگری مدعی است که (پنج) نادرست است. از آنجا که تنها تفاوت این دو پاسخ در همین مطلب است، بیایید ببینیم که آیا گزارهٔ (پنج) در انتخاب یکی از این دو پاسخ به ما کمکی می‌کند.

گزارهٔ (پنج) این است که $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است. ولی

$$BD \leqslant BA + AD = ۱ + ۶ = ۷$$

و در نتیجه، با توجه به اینکه طول ضلعهای دیگر مثلث برابر با ۸ و ۹ است، بدیهی است که تحت هر شرطی (پنج) نادرست است. بنابراین پاسخ درست (ج) است.

مسألهٔ ۲

فرض کنید n عددی طبیعی باشد و

$$I_n = (n+1)^2 + n - \left[\sqrt{(n+1)^2+n+1}\right]^2$$

که در آن [ ] نشانهٔ تابع جزءِ صحیح است. در این صورت

الف) به‌ازای هر n، $I_n > 0$.

ب) به‌ازای هر n، $I_n < 0$.

ج) به‌ازای هر n، $I_n = 0$.

د) I_n هم مقادیری مثبت را اختیار می‌کند هم مقادیری منفی و هم صفر.

راه‌حل

با نگاهی به چند مقدار اولیهٔ I_nها معلوم می‌شود

$$I_1 = 4+1-[\sqrt{6}]^2 = 5-4 = 1$$

$$I_2 = 9+2-[\sqrt{12}]^2 = 11-9 = 2$$

$$I_3 = 16+3-[\sqrt{20}]^2 = 19-16 = 3$$

از این برابریها چنین به‌نظر می‌رسد که ثابت کنیم

$$I_n = n$$

بدیهی است که

$$(n+1)^2 < (n+1)(n+2) < (n+2)^2$$

و در نتیجه

$$n+1 < \sqrt{(n+1)(n+2)} < n+2$$

و بنابراین

$$[\sqrt{(n+1)(n+2)}] = n+1$$

یعنی

$$\left[\sqrt{(n+1)[(n+1)+1]}\right] = \left[\sqrt{(n+1)^2+n+1}\right] = n+1$$

بنابراین

$$\left[\sqrt{(n+1)^2+n+1}\right]^2 = (n+1)^2$$

و در نتیجه

$$I_n = (n+1)^2 + n - (n+1)^2 = n$$

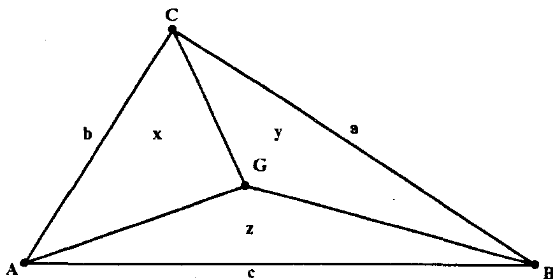
که همان نتیجهٔ مطلوب است.

پس پاسخ درست (الف) است: به‌ازای هر n، $I_n > 0$.

مسأله‌ای از المپیاد اسپانیا، ۱۹۸۶

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۶۸)

فرض کنید طول ضلعهای مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC عددهایی صحیح باشند. فرض کنید پاره‌خطهایی که مرکزثقل مثلث، G، را به رأسها وصل می‌کنند، مثلث را به سه مثلث کوچکتر به مساحتهای x، y و z تقسیم کنند. ثابت کنید که هریک از عددهای x، y و z عددی صحیح و زوج است.



شکل۶۶

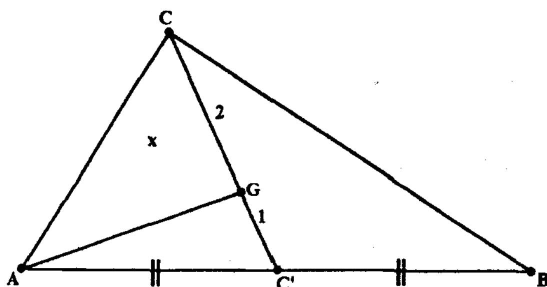
راه‌حل

(راه‌حل مشابهی در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۹۰، ۱۷ آمده است.) نخستین چیزی که باید به آن توجه کنیم این است که مساحت همهٔ این مثلثهای کوچک برابر با $\frac{1}{3}\triangle ABC$ است. برای مثال میانهٔ CC'، $\triangle ABC$ را نصف می‌کند و چون مرکز ثقل هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، پس

$$x = \frac{2}{3}\triangle CAC' = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{1}{3}\triangle ABC$$

به همین ترتیب در مورد y و z. بنابراین کافی است فقط ثابت کنیم x عددی صحیح و زوج است.

اینک بنابر حکمی نسبتاً معروف (که از نظر من همهٔ شرکت‌کنندگان در المپیادها آن‌را به‌خوبی می‌دانند) عددهای درست a، b و c، از سه‌تایی فیثاغورسی، را می‌توان برحسب سه عدد طبیعی مانند



شکل۶۷

k، m و n به‌صورت زیر نوشت:

$$a = ۲kmn, \quad b = k(m^۲ - n^۲), \quad c = k(m^۲ + n^۲)$$

در این صورت با یادآوری اینکه $\angle C$ قائمه است معلوم می‌شود

$$x = \frac{۱}{۳}\triangle ABC = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}ab = \frac{k^۲mn(m^۲ - n^۲)}{۳}$$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم که ۳ نه‌تنها صورت کسر، یعنی N، را می‌شمارد، بلکه ۲ نیز آن‌را می‌شمارد و در نتیجه صورت کسر عددی زوج است. ولی این کار را می‌توانیم به آسانی انجام دهیم.

یک) اگر m یا n بر ۳ بخش‌پذیر باشد، N هم بر ۳ بخش‌پذیر است. در غیر این صورت می‌توان نوشت (به‌پیمانهٔ۳)$m, n \equiv \pm ۱$ و درنتیجه (به‌پیمانهٔ ۳) $m^۲, n^۲ \equiv ۱$، و درنتیجه(به‌پیمانهٔ۳) $m^۲ - n^۲ \equiv ۰$، یعنی N مطمئناً بر ۳ بخش‌پذیر است.

دو) اگر m یا n بر ۲ بخش‌پذیر باشد، N نیز بر ۲ بخش‌پذیر است. در غیر این صورت m و n هر دو فردند و در نتیجه $m^۲ - n^۲$ زوج و برهان کامل شده است.

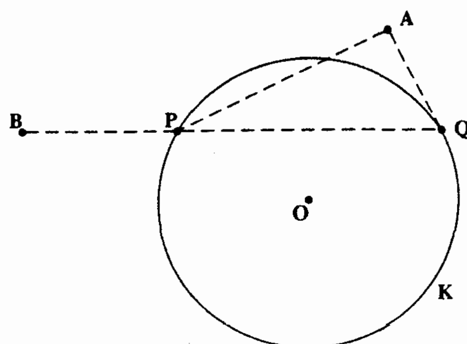
ترسیمی هندسی

(مسألهٔ ۱۱۸۸، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۳۲)

این مسأله مربوط به ترسیم هندسی زیبایی است که اگر اندکی به آن فکر کنید معلوم می‌شود راه‌حل بسیار ساده و سرراستی دارد.

در صفحهٔ دایرهٔ مفروض K، به مرکز O و شعاع r، نقاط A و B مشخص شده‌اند. وتری مانند PQ از K طوری رسم کنید که از B بگذرد و روبه‌رو به زاویهٔ قائمه‌ای در رأس A باشد.

این مسأله از دَن سوکولوفسکی از شهر ویلیامزبورگ در ایالت ویرجینیا و راه‌حل آن از جورج تسینتسیفاس از شهر تسالونیکی در کشور یونان است.



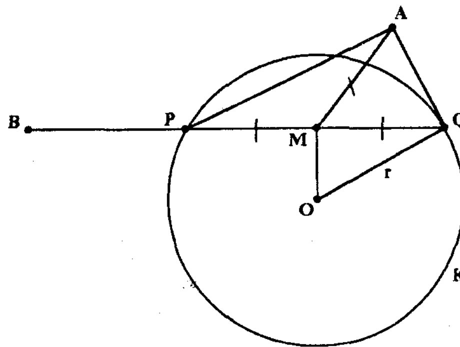
شکل۶۸

راه‌حل

روشن است که اگر بتوانیم نقطهٔ ناآشنایی مانند M روی وتر مطلوب پیدا کنیم، خطی که شامل پاره‌خط BM است مسأله را حل می‌کند. پرسش این است که جای کدام نقطه روی PQ ارزش مشخص شدن را دارد؟ البته روی هر وتری از دایره یکی از نقاط خاص، M، یعنی وسط آن وتر است، زیرا پاره‌خط

MO بر وتر عمود است. با دانستن این مطلب و با توجه به این مطلب که در هر مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر از سه رأس مثلث به یک فاصله است، به نظر می‌رسد که در این مورد این انتخاب بسیار خوب است. بنابراین به نظر می‌رسد که تلاش برای یافتن دو مکان‌هندسی که در نقطهٔ M، وسط PQ، یکدیگر را قطع می‌کنند ارزش دارد.

چون زاویهٔ BMO قائمه است، دایرهٔ به قطر BO از M می‌گذرد. امیدواریم که رابطه‌های سادهٔ دیگری که در شکل وجود دارند مکان‌هندسی دیگری را مشخص کنند که از M می‌گذرد.



شکل۶۹

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMQ از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

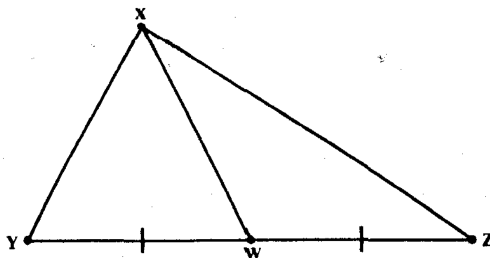
$$r^2 = OM^2 + MQ^2$$

و چون $MQ = MA$، پس

$$r^2 = OM^2 + MA^2$$

در نهایت شگفتی، اکنون به رابطهٔ مهمی رسیدیم، زیرا تنها چیزی که باقی مانده استفاده از این قضیهٔ معروف است که «مجموع مربعهای طول دو ضلع مثلث برابر است با دو برابر طول میانهٔ وارد بر ضلع سوم به‌علاوهٔ نصف مربع ضلع سوم»؛ یعنی با توجه به شکل ۷۰،

$$XY^2 + XZ^2 = 2XW^2 + \frac{1}{2}YZ^2$$



شکل۷۰

(این قضیه نتیجهٔ فوری استفاده از قانون کسینوسها در مثلثهای XYW و XWZ است.)

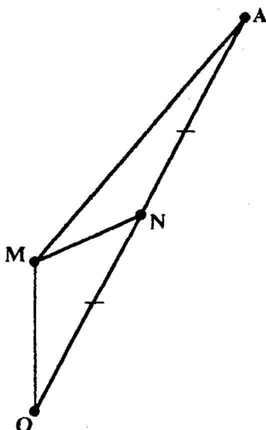
بنابراین اگر در مثلث OMA، MN میانهٔ وارد بر OA باشد (شکل ۷۱ را ببینید)، آنگاه

$$r^۲ = OM^۲ + MA^۲ = ۲MN^۲ + \frac{۱}{۲}OA^۲$$

از این رابطه می‌توانیم MN را برحسب r و OA به‌دست آوریم:

$$MN = \sqrt{\frac{۱}{۲}r^۲ - \frac{۱}{۴}OA^۲}$$

بنابراین دایرهٔ به مرکز N و شعاع MN دومین مکان‌هندسی است که از M می‌گذرد و راه‌حل مسأله تمام شده است.



شکل۷۱

نابرابری شامل لگاریتم

(مسألهٔ ۱۱۲۷، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۰۲)

(قسمت (الف) از مسألهٔ طرح شده از سوی د. س. میترینوویچ، دانشگاه بلگراد، یوگسلاوی؛ راه‌حل از ماری کلامکین، دانشگاه آلبرتا، کانادا)

اگر a، b و c عددهایی حقیقی و بزرگتر از ۱ باشند، به‌ازای هر r ، $r > ۰$، ثابت کنید

$$S = (\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geqslant ۳ \times ۲^r$$

راه‌حل

پیش از هر چیز توجه کنید که $\log_x y = \dfrac{\ln y}{\ln x}$ (اگر فرض کنیم $\log_x y = k$، آنگاه $y = x^k = e^{k\ln x}$ و در نتیجه $\ln y = k\ln x$). بنابراین

$$\log_a bc = \frac{\ln bc}{\ln a} = \frac{\ln b + \ln c}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a} + \frac{\ln c}{\ln a}$$

اینک بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی،

$$\frac{\ln b}{\ln a} + \frac{\ln c}{\ln a} \geqslant ۲\left[\frac{\ln b \cdot \ln c}{(\ln a)^۲}\right]^{۱/۲}$$

و در نتیجه

$$\log_a bc \geqslant \frac{۲(\ln b \cdot \ln c)^{۱/۲}}{\ln a}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$(\log_a bc)^r \geqslant \frac{۲^r(\ln b \cdot \ln c)^{r/۲}}{(\ln a)^r}$$

به همین ترتیب

$$(\log_b ca)^r \geqslant \frac{۲^r(\ln c \cdot \ln a)^{r/۲}}{(\ln b)^r}, \quad (\log_c ab)^r \geqslant \frac{۲^r(\ln a \cdot \ln b)^{r/۲}}{(\ln c)^r}$$

بنابراین

$$S \geqslant \frac{۲^r(\ln b \cdot \ln c)^{r/۲}}{(\ln a)^r} + \frac{۲^r(\ln c \cdot \ln a)^{r/۲}}{(\ln b)^r} + \frac{۲^r(\ln a \cdot \ln b)^{r/۲}}{(\ln c)^r}$$

بالاخره با استفاده از نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی در طرف راست به‌دست می‌آوریم

$$\frac{S}{۳} \geqslant \left[\frac{۲^r(\ln b \cdot \ln c)^{r/۲}}{(\ln a)^r} \cdot \frac{۲^r(\ln c \cdot \ln a)^{r/۲}}{(\ln b)^r} \cdot \frac{۲^r(\ln a \cdot \ln b)^{r/۲}}{(\ln c)^r}\right]^{۱/۳}$$

و در نتیجه

$$S \geqslant ۳\left[\frac{۲^{۳r}(\ln a \cdot \ln b \cdot \ln c)^r}{(\ln a \cdot \ln b \cdot \ln c)^r}\right]^{۱/۳}$$

یعنی

$$S \geqslant ۳ \times ۲^r$$

که همان نابرابری مطلوب است.

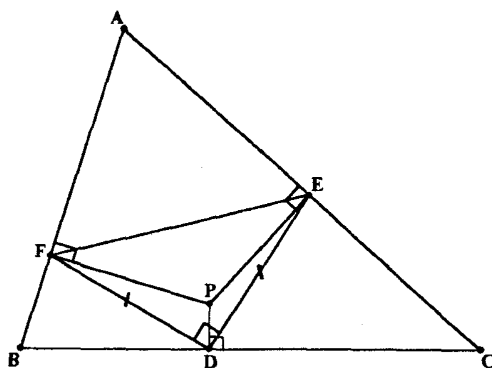
این برهان را می‌توان در مورد n عدد که همگی از ۱ بزرگترند تعمیم داد:

$$S = \sum_{i=۱}^{n} (\log_{a_i} a_۱ a_۲ \cdots a_{i-۱} a_{i+۱} \cdots a_n)^r \geqslant n(n-۱)^r$$

مسأله‌ای در بارهٔ مثلثهای پایی قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

(مسألهٔ ۱۲۳۹، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۱۲۰)

اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر ضلعهای مثلث ABC رسم کنیم، مثلث حاصل از پای عمودها، D، E و F، مثلث پایی P نسبت به $\triangle ABC$ نامیده می‌شود. نقطهٔ P را می‌توان درون یا بیرون $\triangle ABC$ یا حتی روی ضلعی از آن انتخاب کرد. در مسألهٔ ۱۲۳۹، ج. ت. گرونمان (از شهر آرنهِم در هلند) مسألهٔ فریبندهٔ زیر را دربارهٔ مثلثهای پایی مطرح کرده است.



شکل۷۲

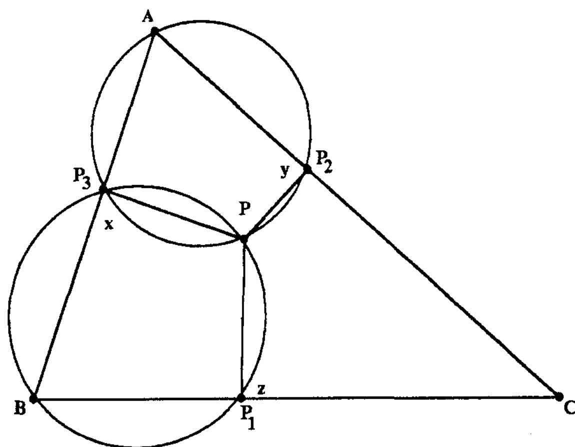
مثلث ABC مفروض است، نقطهٔ P را کجا انتخاب کنیم تا مثلث پایی آن قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد؟

راه‌حل

نمی‌خواهیم این مسأله را کامل حل کنیم و فقط نقطه‌هایی را در نظر می‌گیریم که درون مثلث‌اند.

عمودهای PD، PE و PF مثلث را به سه چهارضلعی تقسیم می‌کنند که هرکدام از آنها

به‌وضوح محاطی است. در نتیجه شکل ما مثال خوبی از چیزی به‌نام پیکربندی «میکل» است. قضیهٔ میکل این نتیجهٔ مهم است که اگر $p_۱$، $p_۲$ و $p_۳$ سه نقطهٔ دلخواه به‌ترتیب روی ضلعهای BC، AC و AB از $\triangle ABC$ باشند، آنگاه دایره‌های $AP_۲P_۳$، $P_۱BP_۳$ و $P_۱P_۲C$ متقارب‌اند.



شکل۷۳

برهان این قضیه بسیار ساده است: با توجه به شکل ۷۳، اگر P نقطهٔ برخورد دایره‌هایی باشد که از A و B می‌گذرند، آنگاه از محاطی بودن چهارضلعیها نتیجه می‌شود $x = y$ و $x = z$، و در نتیجه $y = z$. بنابراین چهارضلعی $PP_۱CP_۲$ نیز محاطی است. P را نقطهٔ میکل $\triangle P_۱P_۲P_۳$، و $\triangle P_۱P_۲P_۳$ را مثلث میکل P می‌نامند.

هر نقطه مانند P نقطهٔ میکل خانواده‌ای نامتناهی از مثلثهای میکل است. P را که انتخاب کنیم، با توجه به شکل روشن است که فقط لازم است خطهای شعاعی $PP_۱$، $PP_۲$ و $PP_۳$ ضلعهای نظیرشان را تحت یک زاویه قطع کنند. در صورتی که این زاویه‌ها قائمه باشند، مثلث میکل حاصل همان مثلث پایی است.

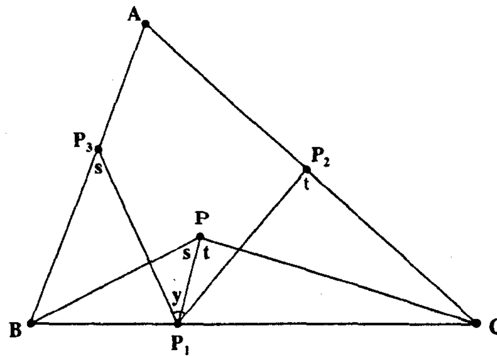
پیکربندی میکل همواره این ویژگی جالب توجه را دارد که

$$\angle BPC = \angle P_۳P_۱P_۲ + A$$

به‌عبارت دیگر، با توجه به شکل ۷۴،

$$s + t = y + A$$

این نتیجه برهان بسیار ساده و سرراستی دارد که با امید به اینکه روش زیر نیز جالب توجه باشد از آن صرفنظر می‌کنم.



شکل۷۴

در چهارضلعیهای محاطی به‌وضوح

$$\angle BP_{3}P_{1} = s, \quad \angle P_{1}P_{2}C = t$$

اینک فرض کنید AB به‌اندازهٔ زاویهٔ s حول P_3 بچرخد تا روی P_3P_1 قرار بگیرد. سپس آن‌را به‌اندازهٔ زاویهٔ $-y$ حول P_1 می‌چرخانیم تا بر P_1P_2 قرار بگیرد و در آخر آن‌را حول P_2 به‌اندازهٔ زاویهٔ t می‌چرخانیم تا روی AC واقع شود. نتیجهٔ نهایی این کارها این است که خط چرخان را از AB تا AC یعنی به‌اندازهٔ زاویه‌ای برابر با A حرکت داده‌ایم. در نتیجه $s - y + t = A$ و یا

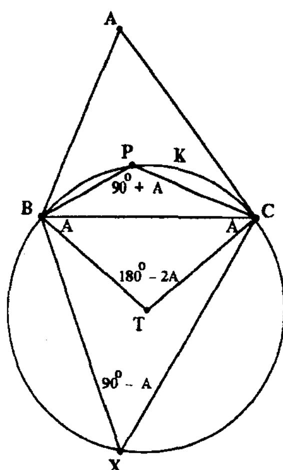
$$s + t = y + A$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

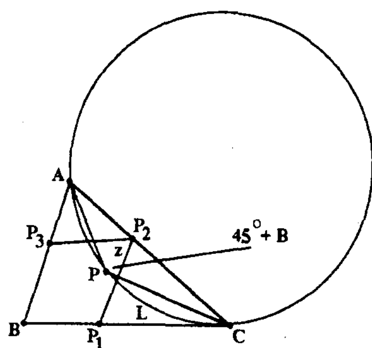
بنابراین اگر بخواهیم رأس قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین پایی روی ضلع BC باشد، باید زاویهٔ y قائمه باشد. در نتیجه زاویهٔ BPC باید برابر با $A + 90^\circ$ باشد. به عبارت دیگر P باید جایی روی کمان K از دایره‌ای قرارگیرد که در آن BC وتر مقابل به کمان درخور زاویهٔ $A + 90^\circ$ است. ولی می‌توانیم این دایره را به‌آسانی رسم کنیم. برای یافتن مرکز این دایره، T، کافی است در نقاط B و C زاویه‌هایی برابر با A رسم کنیم (شکل ۷۵ (الف) را ببینید).

برای اینکه مثلث DEF متساوی‌الساقین هم باشد، زاویه‌های دیگرش باید برابر با 45° باشند، و در نتیجه همانند قبل P باید روی کمان L از دایره‌ای واقع شود که در آن AC وتر مقابل به کمان درخور زاویهٔ $B + 45^\circ$ است (در این حالت از ویژگی زاویهٔ میکل نتیجه می‌شود $\angle CPA = z + B$). این دایره نیز به آسانی رسم می‌شود (شکلهای ۷۵ (ب) و (ج) را ببینید).

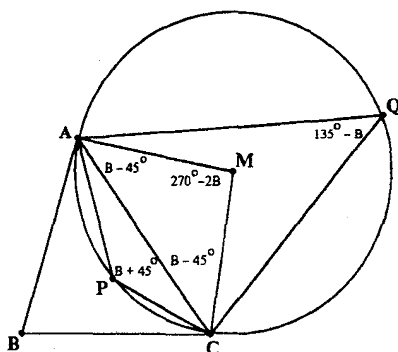
بنابراین تعیین P، محل برخورد کمانهای K و L، کار بسیار ساده‌ای است و روشن است که P تنها نقطه‌ای درون $\triangle ABC$ است که مثلث پایی آن، DEF، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و رأس قائمه‌اش در نقطهٔ D روی BC قرار دارد، یعنی EF وتر آن است. با توجه به وجود دو وضعیت



شکل۷۵ (الف)



شکل۷۵ (ب)



شکل۷۵ (ج)

دیگر P متناظر با وترهای DF و DE، تنها سه نقطه مانند P درون $\triangle ABC$ وجود دارند که جواب مسأله‌اند.

اینجا انتهای جایی است که می‌توانیم موضوع را دنبال کنیم، به استثنای اینکه خاطر نشان کنیم که سه نقطهٔ دیگر مانند P نیز بیرون $\triangle ABC$ وجود دارند و این شش نقطه به‌ترتیب زیر جفت‌جفت‌اند.

اگر P نقطه‌ای درون مثلث باشد که رأس قائمهٔ مثلث پایی نظیرش در D روی BC است، می‌توانیم نقطهٔ نظیر آن، P' را که بیرون $\triangle ABC$ است و رأس قائمه مثلث پایی نظیر آن نیز روی BC قرار دارد، با امتداد کمان K (که در بالا راجع به آن صحبت کردیم) و کامل کردن دایرهٔ مربوط به آن و توجه به نقاط برخورد آن با خط OP که P را به O، مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$، وصل می‌کند بیابیم

(شکل ۷۶ را ببینید). (معلوم می‌شود که نقاط P و P' نسبت به دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ منعکس یکدیگرند و روش ترسیمی که در بالا بیان کردیم، منعکس P، یعنی P'، را به‌دست می‌دهد، زیرا دایرهٔ K بر دایرهٔ محیطی عمود است. (و این خود تمرینی ساده است.))

شکل ۷۶

دو مسأله از المپیاد اتریش، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۴ – ۳۵)

مسألهٔ ۱

با حل کردن معادلهٔ

$$x^{۲} + x - ۲ = ۰$$

به‌آسانی به‌دست می‌آید

$$(x - ۱)(x + ۲) = ۰$$

یعنی ریشه‌ها ۱ و ۲− هستند. در این صورت بدیهی است که $x^{۲} + x - ۲$ چندجمله‌ایی تکین با ضریبهای صحیح است و این ویژگی جالب توجه را دارد که ریشه‌های معادلهٔ نظیرش چیزی جز ضریبهای نهایی آن نیستند.

مثالی دیگر این است

$$x^{۳} + x^{۲} - x - ۱ = ۰$$

$$x^{۲}(x + ۱) - (x + ۱) = ۰$$

$$(x^{۲} - ۱)(x + ۱) = ۰$$

که ریشه‌های ۱، ۱− و ۱− هستند.

در این مسأله از ما خواسته شده است که همهٔ این نوع چندجمله‌ایها را بیابیم:

همهٔ چندجمله‌ایهای تکین با ضریبهای صحیح مانند

$$P_n(x) = x^n + a_۱ x^{n-۱} + a_۲ x^{n-۲} + \cdots + a_n$$

را بیابید به‌طوری که n ریشهٔ $P_n(x) = ۰$ ضریبهای خودش یعنی $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و a_n باشند.

راه‌حل

این مسألهٔ یکی از سه مسأله‌ای بود که شرکت‌کنندگان در این المپیاد برای حل کردن آنها $۴\frac{۱}{۲}$ ساعت وقت در اختیار داشتند. اگرچه شنیدن اینکه بسیاری از شرکت‌کنندگان هر سه مسأله را حل کرده‌اند مرا متعجب

نکرد، ولی باید بگویم که یافتن راه‌حل این مسأله برای من بسیار بیشتر از مدت تمام امتحان طول کشید.

ممکن است برخی از ضریبها برابر با صفر باشند. اگر تعداد کل صفرها در میان a_iها برابر با $n-k$ باشد، آنگاه معادلهٔ $P_n(x) = ۰$ دقیقاً $n-k$ تا ریشهٔ برابر صفر دارد و این موجب می‌شود که x^{n-k} عامل مشترک جمله‌های $P_n(x)$ باشد:

$$P_n(x) = x^n + a_۱x^{n-۱} + \cdots + a_kx^{n-k} = x^{n-k}(x^k + a_۱x^{k-۱} + \cdots + a_k)$$

$n-k$ جملهٔ آخر $P_n(x)$ عبارت‌اند از $۰x^{n-k-۱}$، $۰x^{n-k-۲}$، $\cdots$ و ۰، که $n-k$ ضریب صفر نظیر ریشه‌های صفر چندجمله‌ای‌اند. از آنجا که این ضریبهای حذف شده کل ضریبهای صفرند، بقیهٔ ضریبها، یعنی $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و a_k، باید ناصفر باشند. به عبارت دیگر $P_n(x)$ از حاصل‌ضرب توانی از x در چندجمله‌ایی که همهٔ ضریبهایش ناصفرند تشکیل شده است. قسمت اصلی $P_n(x)$ چندجمله‌ای

$$P_k(x) = x^k + a_۱x^{k-۱} + \cdots + a_k$$

است که در آن a_iها ناصفرند، زیرا اگر ریشه‌های چندجمله‌ایی از این نوع برابر با ضریبهایش، a_iها، باشد، همین مطلب دربارهٔ چندجمله‌ای

$$x^t(x^k + a_۱x^{k-۱} + \cdots + a_k), \quad t = ۰, ۱, \cdots$$

درست است. اگرچه عامل x^t، t ریشهٔ صفر جدید به ریشه‌های قبلی اضافه می‌کند، ولی در عین حال t ضریب صفر جدید نیز به آخر چندجمله‌ای می‌افزاید. چون به‌ازای هر n چندجمله‌ای x^n قابل‌قبول است، روشن است که مسأله به تعیین همهٔ چندجمله‌ایهایی به شکل $P_k(x)$ منجر می‌شود.

کار را با ذکر این مطلب آغاز می‌کنیم که $P_k(x)$ همواره به‌شکل زیر تجزیه می‌شود:

$$P_n(x) = x^k + a_۱x^{k-۱} + \cdots + a_k = (x-a_۱)(x-a_۲)\cdots(x-a_k)$$

از برابر هم قرار دادن جمله‌ها نتیجه می‌گیریم

$$a_k = (-۱)^k a_۱a_۲\cdots a_k$$

و چون a_k ناصفر است، پس

$$a_۱a_۲\cdots a_{k-۱} = (-۱)^k$$

از آنجا که aها عددهایی صحیح‌اند، معلوم می‌شود که هریک از ضریبهای $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و $a_{k-۱}$ باید یا ۱+ باشد یا ۱−. در نتیجه مقسوم‌علیه نظیر آنها در $P_k(x)$ یا $x - ۱$ است یا $x + ۱$. هرگاه i تعداد ضریبهای $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و $a_{k-۱}$ باشد که برابر با ۱+ هستند، نتیجه می‌شود

$$P_k(x) = (x-۱)^i(x+۱)^{k-۱-i}(x-a_k)$$

اینک با بسط این عاملها و ضرب آنها در یکدیگر معلوم می‌شود که جملهٔ آخر باید برابر با a_k باشد. ولی اگر i عددی صحیح و زوج باشد، جملهٔ نهایی در $(x-۱)^i$ برابر است با ۱+ که این امر به پدید آمدن جملهٔ نهایی $-a_k$ می‌انجامد، زیرا $(x+۱)^{k-۱-i}$ همواره به ۱+ ختم می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود $a_k = -a_k$ و یا $a_k = ۰$ که تناقض است. در نتیجه i باید فرد باشد.

در این حالت، دست‌کم یکی از ریشه‌ها باید ۱+ باشد و در نتیجه $P_k(1) = 0$. بنابراین

$$1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0 \quad \text{و در نتیجه} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_k = -1$$

از طرف دیگر با مساوی هم قرار دادن ضریبهای x^{k-1} در شکل تجزیه شدهٔ $P_k(x)$ معلوم می‌شود که مجموع ریشه‌ها برابر با $-a_1$ است:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = -a_1$$

در اینجا به این نتیجهٔ کم اهمیت توجه کنید که a_1 باید همواره برابر با ۱ باشد. اینک می‌توان نوشت

$$a_k = -1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})$$

و چون a_1، a_2، $\cdots$ و a_{k-1} از i تا ۱+ و $(k-1-i)$ تا ۱− تشکیل شده‌اند، پس

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = i - (k-1-i) = -k + 2i + 1$$

که در نتیجه

$$a_k = -1 + k - 2i - 1 = k - 2i - 2$$

و

$$P_k(x) = (x-1)^i (x+1)^{k-1-i} [x - (k - 2i - 2)]$$

از آنجا که همواره بهتر است برای محکم کردن جای پایمان به چند حالت اولیه توجه کنیم، چند مقدار نخستین k را بررسی می‌کنیم.

$k = 1$: این حالت کاملاً ساده است، زیرا از $P_1(x) = x + a_1 = 0$ نتیجه می‌شود ریشهٔ a_1 باید برابر با $-a_1$ باشد و در نتیجه $a_1 = 0$ که تناقض است. به‌ازای $k = 1$، هیچ $P_n(x)$ای وجود ندارد و به‌ازای $n = 1$، فقط یک $P_n(x)$ به‌دست می‌آید که همان $P_1(x) = x$ است که از شکل کلی $P_n(x) = x^n$ به‌دست می‌آید.

$k = 2$: در این حالت عدد صحیح و فرد i فقط ممکن است ۱ باشد (به یاد آورید که $i < k$) از اینجا معلوم می‌شود $a_k = k - 2i - 2 = -2$ و در نتیجه

$$P_2(x) = (x-1)^1 (x+1)^0 (x+2) = x^2 + x - 2$$

که همان مثال نخست است که در آغاز مسأله آمده بود.

$k = 3$: بازهم عدد صحیح i فقط ممکن است ۱ باشد و در نتیجه $a_k = k - 2i - 2 = -1$ که ایجاب می‌کند

$$P_3(x) = (x-1)^1 (x+1)^1 (x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$$

که همان مثال دوم در آغاز مسأله است.

$k = 4$: در این حالت i یا ۱ است یا ۳.

به‌ازای $i = 1$ نتیجه می‌شود $a_k = k - 2i - 2 = 0$ که تناقض است.

به‌ازای $i = ۳$ نتیجه می‌شود $a_k = -۴$ و

$$P_۴(x) = (x-۱)^۳(x+۱)^۰(x+۴) = (x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱)(x+۴)$$
$$= x^۴ + x^۳ - ۹x^۲ + ۱۱x - ۴$$

که در آن $a_۲ = -۹$ و $a_۳ = ۱۱$، که برابر با مقدارهای ۱+ یا ۱− نیستند. بنابراین به‌ازای $k = ۴$ هیچ $P_k(x)$ای وجود ندارد.

$k = ۵$: به‌ازای $i = ۱$ نتیجه می‌شود

$$P_۵(x) = (x-۱)^۱(x+۱)^۳(x-۱) = (x^۲ - ۲x + ۱)(x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱)$$
$$= x^۵ + x^۴ - ۲x^۳ + \cdots$$

که در آن جملهٔ نامناسب $a_۲ = -۲$ وجود دارد

به‌ازای $i = ۳$،

$$P_۵(x) = (x-۱)^۳(x+۱)^۱(x+۳) = (x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱)(x^۲ + ۴x + ۳)$$
$$= x^۵ + x^۴ - ۶x^۳ + \cdots$$

که در آن $a_۲ = -۶$. پس به‌ازای $k = ۵$ نیز $P_k(x)$ای وجود ندارد.

در اینجا ممکن است دچار تردید شویم که آیا $P_k(x)$ دیگری وجود دارد؟ متأسفانه راه برطرف کردن این تردید روشن نیست. چون تجربهٔ محدود ما نشان داد که مقدار $a_۲$ نامناسب است، ممکن است بتوانیم ثابت کنیم که به‌ازای مقادیر بزرگتر k، هیچ‌گاه $a_۲$ برابر با ۱+ یا ۱− نمی‌شود. برای این کار، فرد بودن عدد i را با جایگزینی $i = ۲j - ۱$ وارد دستور $P_k(n)$ می‌کنیم. در این صورت j عددی طبیعی است و $a_k = k - ۲i - ۲ = k - ۴j$ و در نتیجه

$$P_k(x) = (x-۱)^{۲j-۱}(x+۱)^{k-۲j}[x - (k - ۴j)]$$

به‌نظر می‌رسد که برای محاسبهٔ جملهٔ $x^{k-۲}$ راهی بجز بسط دادن و محاسبهٔ واقعی وجود ندارد و اگرچه این امر تا اندازه‌ای از زیبایی راه‌حل می‌کاهد اما چاره‌ای نیست. از این‌رو

$$(x-۱)^{۲j-۱} = x^{۲j-۱} - (۲j-۱)x^{۲j-۲} + \frac{(۲j-۱)(۲j-۲)}{۲}x^{۲j-۳} + \cdots$$
$$(x+۱)^{k-۲j} = x^{k-۲j} + (k-۲j)x^{k-۲j-۱} + \frac{(k-۲j)(k-۲j-۱)}{۲}x^{k-۲j-۲} + \cdots$$
$$x - a_k = x - (k - ۴j)$$

پنج جمله از $x^{k-۲}$ وجود دارد که ضریب $a_۲$ را تشکیل می‌دهند:

$$a_۲ = ۱ \cdot ۱ \cdot \frac{(۲j-۱)(۲j-۲)}{۲} + ۱ \cdot (k-۲j)[-(۲j-۱)] + ۱ \cdot \frac{(k-۲j)(k-۲j-۱)}{۲} \cdot ۱$$
$$+ [-(k-۴j)] \cdot ۱ \cdot [-(۲j-۱)] + [-(k-۴j)](k-۲j) \cdot ۱$$

چون یا $a_2 = +1$ و یا $a_2 = -1$، پس

$$(2j-1)(j-1)-(k-2j)(2j-1)+\frac{1}{2}(k-2j)(k-2j-1)$$

$$+(k-4j)(2j-1)-(k-4j)(k-2j) = +1 \quad \text{یا} \quad -1$$

$$2j^2-3j+1-2jk+4j^2+k-2j+\frac{1}{2}(k^2-4jk+4j^2-k+2j)$$

$$+2jk-8j^2-k+4j-k^2+6jk-8j^2 = +1 \quad \text{یا} \quad -1$$

$$-8j^2+4jk-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}k^2 = 0 \quad \text{یا} \quad -2$$

$$16j^2-8jk+k+k^2 = 0 \quad \text{یا} \quad 4$$

یعنی یا

$$16j^2-8jk+(k^2+k) = 0 \tag{1}$$

و یا

$$16j^2-8jk+(k^2+k-4) = 0 \tag{2}$$

اینک j عددی طبیعی است و در نتیجه اگر این معادله‌ها را برحسب j حل کنیم، D، مبین آنها باید منفی باشد. در حالت (۱) نتیجه می‌شود

$$D = 64k^2-64(k^2+k) = -64k < 0$$

و در حالت (۲) معلوم می‌شود

$$D = 64k^2-64(k^2+k-4) = -64(k-4)$$

که به دلیل اینکه $k \geqslant 5$، D همواره منفی است. از این تناقض معلوم می‌شود که a_2 دیگر مقدار قابل قبولی را اختیار نمی‌کند و در حقیقت $P_k(x)$ دیگری یافت نمی‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $P_n(x)$ برابر با یکی از چندجمله‌ایهای x، x^2+x-2، x^3+x^2-x-1 یا حاصل‌ضرب یکی از توانهای x در آنهاست:

$$P_n(x) = x^t \cdot x, \quad x^t(x^2+x-2) \quad \text{یا} \quad x^t(x^3+x^2-x-1), \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

مسألهٔ ۲

(راه‌حل دیگری در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۹، ۲۶۴ آمده است.)

این مسأله دربارهٔ دنباله‌هایی مانند $x_1x_2\cdots x_n$ است که در آنها هریک از x_iها برابر است با a، b یا c. تعداد این‌گونه دنباله‌ها را بیابید درصورتی‌که

الف) طول آنها برابر با n باشد،

ب) ابتدا و انتهای همهٔ آنها حرف a باشد، و

ج) همواره در آنها جمله‌های مجاور حرفهای متمایز باشند.

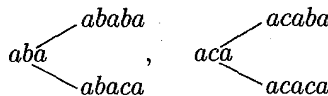
راه‌حل

اگرچه این نوع مسأله‌ها جزءِ مباحث استاندارد در ترکیبیات مقدماتی هستند، ولی با این حال در این مسأله دشواری جالب توجهی وجود دارد و این فرصت ایجاد می‌شود که بتوانیم نحوهٔ استفاده از فن ترکیبیاتی نیرومند و رایجی را نشان دهیم.

اگر بخواهیم به بهترین سنت ریاضیات پایبند باشیم، نخست نگاه مختصری به دنباله‌های نظیر چند مقدار کوچک n می‌اندازیم. فرض کنید تعداد دنباله‌های به‌طول n را با t_n نشان دهیم.

n	دنباله‌ها	t_n
۱	a	۱
۲	هیچ	۰
۳	aba, aca	۲
۴	$abca, acba$	۲
۵	$ababa, abaca, acaba,$ $acaca, abcba, acbca$	۶

با توجه به این جدول کوتاه می‌توانیم به‌خوبی قاعده‌ای کلی را که بر دنبالهٔ $\{t_n\}$ حاکم است بیابیم. هرگاه بکوشیم که روشی بیابیم که احتمالاً به‌وسیلهٔ آن قادر باشیم به کمک دنباله‌های کوچکتر دنباله‌هایی به‌طول n بسازیم، ممکن است متوجه این مطلب شویم که دنباله‌ای به‌طول n را می‌توان با افزودن ba یا ca به انتهای دنباله‌ای به‌طول $n-۲$ به‌دست آورد. برای مثال



البته همهٔ دنباله‌هایی که به این روش ساخته می‌شوند در سومین مکان ماقبل آخرشان حرف a دارند. به‌عکس، هرگاه در دنباله‌ای به‌طول n سومین مکان ماقبل آخر حرف a باشد، با حذف دو جملهٔ آخرش دنبالهٔ قابل قبولی به‌طول $n-۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین تعداد دنباله‌هایی که سومین جملهٔ ماقبل آخرشان حرف a باشد $۲t_{n-۲}$ است.

در بقیهٔ دنباله‌های به‌طول n، سومین جملهٔ ماقبل آخر یا b است یا c، و با حذف جملهٔ ماقبل آخر هر دنباله‌ای از این نوع دنباله‌ای به‌طول $n-۱$ به‌دست می‌آید

$$a\cdots bca \to a\cdots ba$$

$$a\cdots cba \to a\cdots ca$$

(این کار وقتی‌که سومین جملهٔ ماقبل آخر حرف a است مجاز نیست.) به‌عکس، تنها می‌توان یک حرف را بین دو جملهٔ آخر دنباله‌ها قرار دارد و بدیهی است که با انجام این کار دنباله‌ای به‌طول $n-۱$ به دنباله‌ای به‌طول n تبدیل می‌شود. بنابراین $t_{n-۱}$ دنباله به‌طول n وجود دارد که در هریک از آنها سومین جملهٔ ماقبل آخر یا b است یا c و در مجموع نتیجه می‌شود

$$t_n = t_{n-۱} + ۲t_{n-۲}$$

از نظر برخی از شرکت‌کنندگان مشکل در اینجا رفع شده است زیرا راه‌حل سرراست این‌گونه رابطه‌های بازگشتی در بسیاری از برنامه‌های آموزشی المپیاد وجود دارد. با این حال، اگر به راه‌حل سرراست این‌گونه رابطه‌های تسلط ندارید، توجه کنید که چگونه استفاده از تابعهای مولد به‌زیبایی دستوری برای t_n به‌دست می‌دهد.

اگر اعداد نامعلوم t_n را ضریبهای سری توانی $f(x)$ به شکل

$$f(x) = t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \cdots + t_n x^{n-1} + \cdots$$

در نظر بگیریم، آنگاه

$$x \cdot f(x) = t_1 x + t_2 x^2 + \cdots + t_{n-1} x^{n-1} + \cdots$$

و

$$2x^2 \cdot f(x) = 2t_1 x^2 + \cdots + 2t_{n-2} x^{n-1} + \cdots$$

اگر سطرهای دوم و سوم را از سطر اول کم کنیم، با توجه به رابطهٔ بازگشتی $t_n - t_{n-1} - 2t_{n-2} = 0$ نتیجه می‌گیریم

$$(1 - x - 2x^2) f(x) = t_1 + (t_2 - t_1)x$$

$$= 1 - x$$

(به یاد آورید که $t_1 = 1$ و $t_2 = 0$.) و بنابراین

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 - x - 2x^2}$$

اگر این عبارت را به کسرهای جزئی تجزیه کنیم حاصل می‌شود

$$\frac{1 - x}{(1 - 2x)(1 + x)} = \frac{A}{1 - 2x} + \frac{B}{1 + x}$$

$$1 - x = A(1 + x) + B(1 - 2x)$$

به‌ازای $x = -1, \frac{1}{2}$، به‌ترتیب درمی‌یابیم که $3B = 2$ و $\frac{3}{2}A = \frac{1}{2}$ که در نتیجه $A = \frac{1}{3}$ و $B = \frac{2}{3}$. در نتیجه

$$f(x) = \frac{1}{3}(1 - 2x)^{-1} + \frac{2}{3}(1 + x)^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}(1 + 2x + \cdots + 2^{n-1} x^{n-1} + \cdots)$$

$$+ \frac{2}{3}(1 - x + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \cdots).$$

که از آن نتیجه می‌شود ضریب t_n، مربوط به x^{n-1}، برابر است با

$$t_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} + \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n-1}$$

$$= \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3}$$

مسأله‌ای از المپیاد کانادا، ۱۹۸۸ (با کمی اصلاح)

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۶۳)

فرض کنید $S = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_r\}$ مجموعه‌ای از عددهای طبیعی و دست‌کم شامل دو عضو باشد. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی از S مانند $A = \{a_i, a_j, \cdots, a_k\}$، $p(A)$ را برابر با حاصل‌ضرب عضوهایش تعریف می‌کنیم: $p(A) = a_i a_j \cdots a_k$. فرض کنید $m(S)$ مقدار میانگین این حاصل‌ضربها باشد که در مورد زیرمجموعه‌های ناتهی S حساب شده است.

بین مجموعه‌هایی مانند S که $m(S) = ۱۳$، مجموعه‌ای را تعیین کنید که به‌ازای آن عددی طبیعی مانند $a_{r+۱}$ وجود داشته باشد که افزودن این عدد به این مجموعه مقدار m را به عدد ۴۹ افزایش دهد:

$$m(S) = m(a_۱, a_۲, \cdots, a_r) = ۱۳$$

و

$$m(a_۱, a_۲, \cdots, a_r, a_{r+۱}) = ۴۹$$

راه‌حل

از آنجا که تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه‌ای rتایی برابر با $۲^r - ۱$ است، پس

$$m(S) = \frac{\sum p(A)}{۲^r - ۱}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\sum p(A) &= (a_۱ + a_۲ + \cdots + a_r) + (a_۱ a_۲ + \cdots + a_{r-۱} a_r) + \cdots + (a_۱ a_۲ \cdots a_r) \\ &= (۲^r - ۱) m(S)\end{aligned}$$

اینک برای تعیین میانگین در مورد مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \cdots, a_{r+۱}\}$، $\sum p(A)$ جدید برابر است با

$\sum p(A)$ قدیمی به‌اضافهٔ جمله‌های شامل عدد صحیح جدید a_{r+1}. بنابراین

$$m\{a_1,\cdots,a_{r+1}\}=\frac{1}{2^{r+1}-1}\Big[\sum p(A)\ \text{قدیمی}\ +a_{r+1}+a_{r+1}(a_1+a_2+\cdots+a_r)$$
$$+a_{r+1}(a_1a_2+\cdots+a_{r-1}a_r)+\cdots+a_{r+1}(a_1a_2\cdots a_r)\Big]$$
$$=\frac{1}{2^{r+1}-1}\Big[\sum p(A)\ \text{قدیمی}\ +a_{r+1}(1+\sum p(A)\ \text{قدیمی})\Big]$$
$$=\frac{1}{2^{r+1}-1}[(2^r-1)m(S)+a_{r+1}[1+(2^r-1)m(S)]]$$

بنابراین

$$49=\frac{1}{2^{r+1}-1}[(2^r-1)\times 13+a_{r+1}[1+(2^r-1)\times 13]]$$
$$49(2^{r+1}-1)=13\times 2^r-13+a_{r+1}(13\times 2^r-12)$$

و در نتیجه

$$a_{r+1}=\frac{85\times 2^r-36}{13\times 2^r-12}$$

حال از آنجا که r باید عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ یا مساوی با آن باشد، پس a_{r+1} عددی طبیعی است. اگر $r=2$،

$$a_3=\frac{85\times 4-36}{13\times 4-12}=\frac{340-36}{52-12}=\frac{304}{40}$$

پس a_3 عددی صحیح نیست. اگر $r=3$،

$$a_4=\frac{85\times 8-36}{13\times 8-12}=\frac{680-36}{104-12}=\frac{644}{92}=7$$

از آنجاکه نمی‌دانیم این جواب منحصر به‌فرد است یا نه، بررسی نتایج حاصل از حالتی را که $r=3$ و $a_4=7$ دنبال می‌کنیم.

وقتی‌که $r=3$، مقدار 2^r-1 برابر با ۷ است و

$$m(S)=\frac{\sum p(A)}{7}=13$$

که در نتیجه

$$\sum p(A)=(a_1+a_2+a_3)+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)+(a_1a_2a_3)=91$$

باید جوابی از این معادله را در مجموعهٔ عددهای صحیح، مانند (a_1,a_2,a_3)، به‌دست آوریم. باید اذعان کرد که به نظر می‌رسد این مسأله مسألهٔ بغرنجی است، و قیافهٔ این تابعهای متقارن تنها کمکی که به ما می‌کند این است که ما را به یاد عبارت معمولی در نظریهٔ معادلات می‌اندازد:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)$$
$$=x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x+a_1a_2a_3$$

بنابراین به‌ازای $x = ۱$ ،

$$(۱ + a_۱)(۱ + a_۲)(۱ + a_۳) = ۱ + ۹۱ = ۹۲$$

چون تجزیهٔ ۹۲ به‌صورت ۲ × ۲ × ۲۳ است، تنها جواب این معادله در مجموعهٔ عددهای صحیح (۲۲ ,۱ ,۱) یا جایگشتی از آن است.

بنابراین حالتی که $r = ۳$ ناامید کننده نیست و نتیجه می‌گیریم که یکی از جوابهای قابل‌قبول عبارت است از

$$S = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_r\} = \{۱, ۱, ۲۲\}$$

و

$$\{a_۱, a_۲, \cdots, a_r, a_{r+۱}\} = \{۱, ۱, ۲۲, ۷\}$$

بی‌تردید به‌ازای این مقادیر $m(S) = ۱۳$ ولی مطمئن هستم که همهٔ ما پس از اثبات برابری $m(۱, ۱, ۲۲, ۷) = ۴۹$ آسوده‌تر می‌شویم:

$$\begin{aligned} m(۱, ۱, ۲۲, ۷) =& \frac{۱}{۲^۴ - ۱}[(۱ + ۱ + ۲۲ + ۷) + (۱ + ۲۲ + ۷ + ۲۲ + ۷ + ۱۵۴) \\ &+ (۲۲ + ۷ + ۱۵۴ + ۱۵۴) + ۱۵۴] \\ =& \frac{۱}{۱۵}(۳۱ + ۲۱۳ + ۳۳۷ + ۱۵۴) \\ =& \frac{۷۳۵}{۱۵} \\ =& ۴۹ \end{aligned}$$

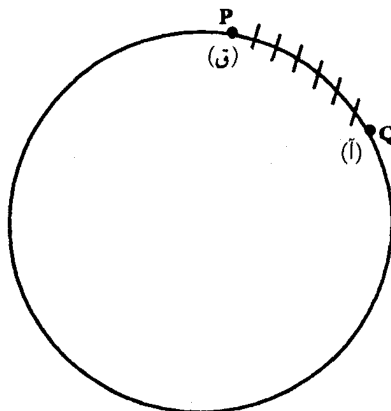
مسأله‌ای در بارهٔ مجموعه‌های بسته

فرض کنید هر نقطه از دایره‌ای با یکی از رنگهای قرمز و آبی (یا احتمالاً با هر دو رنگ) رنگ‌آمیزی شده باشد به‌طوری‌که هم مجموعهٔ نقطه‌های قرمز بسته است هم مجموعهٔ نقطه‌های آبی، یعنی هردو شامل همهٔ نقاط حدی خود هستند. ثابت کنید که اگر مجموعهٔ نقاط قرمز، R، وتری به‌طول دلخواه از دایره را مشخص نکند، آنگاه مجموعهٔ نقاط آبی، B، باید بتواند این کار را انجام دهد.

راه‌حل

روشن است که حکم مسأله در حالتی که تنها یک رنگ به‌کار رفته باشد درست است.

فرض کنید هر دو رنگ واقعاً به‌کار رفته باشند و P نقطه‌ای به رنگ قرمز باشد. اینک تنها دو حالت برای وجود نقاط آبی در نزدیکی P وجود دارد (شکل ۷۷ را ببینید).



شکل۷۷

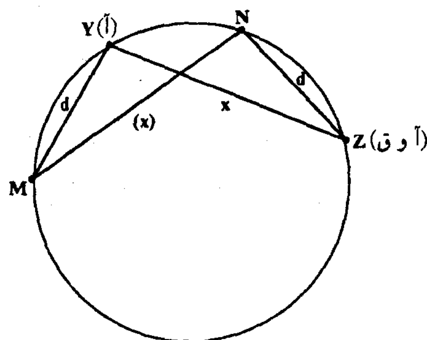
الف) نقاط آبی به‌اندازهٔ دلخواه نزدیکی به P وجود دارد.

در این حالت P نقطهٔ حدی مجموعهٔ نقاط آبی، B، است، و چون B بسته است $P \in B$. بنابراین P هم قرمز است هم آبی.

ب) نقطه‌ای مانند Q به رنگ آبی وجود دارد که نزدیکترین نقطه به P است.

در این حالت کمان باز PQ به تمامی به رنگ قرمز است، و در نتیجه Q نقطهٔ حدی R است، و چون R بسته است Q نیز باید نقطه‌ای قرمز رنگ باشد. در هر حالت باید نقطه‌ای مانند Z روی دایره وجود داشته باشد که هم قرمز است هم آبی.

اینک فرض کنید R هیچ وتری به‌طول x را مشخص نکند. از آنجا که Z قرمز است، وتری مانند ZY به‌طول x مشخص نمی‌شود مگر اینکه Y آبی باشد. اینک فرض کنید وترهای ZN و YM به‌طول دلخواه d در جهت دوری یکسانی مشخص شده‌اند (شکل ۷۸ را ببینید). در این حالت باید طول وتر MN نیز x باشد و چون هیچ جفتی از نقطه‌های قرمز وتری با این طول را مشخص نمی‌کنند، پس دست‌کم یکی از نقاط M و N باید آبی باشد. در نتیجه یا ZN باید دو نقطهٔ آبی را به‌هم وصل کند و یا MY، و بنابراین مجموعهٔ B واقعاً هر وتری با طول دلخواه d را مشخص می‌کند.



شکل۷۸

این مسأله و نیز گنجینه‌ای از نتایج هندسهٔ ترکیبیاتی، شامل مسألهٔ دشوار زیر (همراه با راه‌حل آن)، درکتاب واقعاً برجستهٔ هندسهٔ ترکیبیاتی در صفحه، اثر هادویگر، دوبرانر وکلی، آمده است.

تمرین

اگر هر نقطه از پاره‌خطی به‌طول واحد به رنگ قرمز یا آبی رنگ‌آمیزی شود به‌طوری‌که هم مجموعهٔ نقطه‌های قرمز بسته باشد هم مجموعهٔ نقطه‌های آبی، آنگاه دست‌کم یکی از این مجموعه‌ها باید پاره‌خطی از هر طول دلخواه را که بیش از $\frac{1}{3}$ نیست مشخص کند، البته لزومی ندارد این نتیجه در مورد طولهایی که از $\frac{1}{3}$ بیشترند درست باشد.

مسأله‌ای از مسابقات تیمی اتریش ـ لهستان، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۳۶)

عددهای صحیحی مانند ۵۵، ۸۹۸ و ۳۰۱۰۳ را که از طرف راست و چپ به یک صورت خوانده می‌شوند عدد مقلوب می‌نامند. در این مسأله با زیرمجموعه‌ای از عددهای مقلوب به‌نام N سروکار داریم که هر عضو آن دارای ویژگی (ساختگی) زیر است:

> حاصل‌ضرب رقمهای آن سه واحد کمتر از سه برابر مجموع رقمهای آن است؛
> یعنی، $p = ۳s - ۳$.

عددهای ۶۱۶ و ۲۹۲ دو مثال از این نوع عددها هستند که در مورد هر دو آنها

$$p = ۳۶, \quad s = ۱۳$$

ثابت کنید تعداد اعضای N نامتناهی است، ولی تعداد اعضای زیرمجموعهٔ Q از N که اعضایش فاقد رقم ۱ هستند (مانند ۲۹۲) متناهی است. تمام عضوهای Q را بیابید.

راه‌حل

بدیهی است که p بر ۳ بخش‌پذیر است و در نتیجه دست‌کم یکی از رقمهای اعضای N باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

حسن استفاده از رقمهای ۱ در اینجاست که با استفاده از آنها مجموع رقمهای عددی که می‌سازیم افزایش می‌یابد بدون اینکه حاصل‌ضرب آنها تغییر کند. به این ترتیب می‌توان مجموع ناقص عدد فعلی را به مقدار موردنظر، یعنی $s = \frac{p+۳}{۳}$، رساند. برای مثال، فرض کنید در جستجوی عضوهای مجموعهٔ N عدد صحیحی را تا مرحلهٔ ۵۳۵ ساخته‌ایم. در این حالت حاصل‌ضرب فعلی، p، برابر با ۷۵ و مجموع فعلی، s، برابر با ۱۳ است. با وجود این، به‌ازای $p = ۷۵$ از شرط $s = \frac{p+۳}{۳}$ نتیجه می‌شود $s = \frac{۷۸}{۳} = ۲۶$. یعنی اینکه برای برقرار شدن شرط مسأله مجموع فعلی نیازمند ۱۳

واحد دیگر است. مشکل اینجاست که به‌دلیل فرد بودن عدد ۱۳ نمی‌توانیم تعداد $۶\frac{۱}{۲}$ عدد ۱ به دو طرف ۵۳۵ اضافه کنیم تا خصلت مقلوب بودن آن حفظ شود. اما این مشکل کوچکی است، زیرا اگر کار خود را با قطعه‌ای میانی که شامل تعداد زوجی از رقمهای برابر است، مانند ۵۳۳۵، آغاز کنیم، تعداد رقمهای ۱ لازم برای افزایش مجموع به مقدار موردنیاز اهمیتی ندارد، زیرا: اگر این مقدار عددی زوج بود، نیمی از ۱ها را در طرف راست و نیم دیگر را در طرف چپ عدد بگذارید؛ اگر این تعداد عددی فرد بود، یکی از ۱ها را درست بین دو عدد ۳ و نیمی از بقیه را در طرف راست و نیم دیگر را در طرف چپ عدد موردنظر قرار دهید. در مورد عدد ۵۳۳۵، $p = ۲۲۵$، و در نتیجه

$$s = \frac{۲۲۸}{۳} = ۷۶$$

درحالی که مجموع فعلی آن ۱۶ است. حال در هر دو انتهای این عدد ۳۰ عدد ۱ می‌گذاریم تا ترفندمان به‌کار آید. بنابراین

$$\underbrace{۱۱\cdots\cdots\cdots۱}_{۳۰\ \text{تا}}۵۳۳۵\underbrace{۱\cdots\cdots\cdots۱}_{۳۰\ \text{تا}} \in N$$

البته این شیوه فقط وقتی مؤثر است که مجموع فعلی نیاز به افزایش داشته باشد. ولی این مسأله نیز به‌آسانی حل می‌شود. برای مثال، در عددهای ۴ رقمی، مجموع رقمهای هر عدد بیشتر از $۳۶ = ۹ \times ۴$ نیست و در نتیجه برای اینکه بتوانیم از این شیوه استفاده کنیم لازم است که حاصل‌ضرب p از عدد $۱۰۵ = ۳ - ۳۶ \times ۳$ بیشتر باشد. (این وضعیت در عددهایی مانند ۵۳۳۵ و بسیاری از انتخابهای دیگر نیز روی می‌دهد.) بنابراین کاملاً بدیهی است که N مجموعه‌ای نامتناهی است. با وجود این، برهانی واقعی که براساس مطالب بالا باشد نیازمند پیدا کردن دستوری است که تعدادی نامتناهی از عضوهای N را تولید کند. بازهم این مسألهٔ مهمی نیست زیرا تعدادی دستور وجود دارد که می‌توانیم از آنها استفاده کنیم.

فرض کنید که تنها از رقمهای ۵ و ۳ استفاده کنیم. عددی را در نظر بگیرید که دو رقم ۳ در وسط و k رقم ۵ در هر طرف داشته باشد:

$$\underbrace{۵۵\cdots\cdots\cdots۵}_{k\ \text{تا}}۳۳\underbrace{۵\cdots\cdots\cdots۵}_{k\ \text{تا}}$$

در این صورت $p = ۹ \times ۵^{۲k}$ و در نتیجه باید $s = ۳ \times ۵^{۲k} + ۱$. بنابراین لازم است که مجموع فعلی به اندازهٔ

$$۳ \times ۵^{۲k} + ۱ - (۱۰k + ۶) = ۳ \times ۵^{۲k} - ۱۰k - ۵$$

که عددی زوج است، افزایش یابد. بنابراین، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k،

$$\underbrace{۱۱\cdots\cdots\cdots۱}_{\frac{۱}{۲}(۳\times۵^{۲k}-۱۰k-۵)\ \text{تا}}\underbrace{۵۵\cdots\cdots۵}_{k\ \text{تا}}۳۳\underbrace{۵\cdots\cdots۵}_{k\ \text{تا}}\underbrace{۱\cdots\cdots\cdots۱}_{\frac{۱}{۲}(۳\times۵^{۲k}-۱۰k-۵)\ \text{تا}} \in N$$

به‌ازای $k = ۲$، نتیجه می‌شود

$$\underbrace{۱۱۰\cdots\cdots\cdots۱}_{۹۲۵\ \text{تا}}۵۵۳۳۵۵\underbrace{۱۰\cdots\cdots\cdots۱}_{۹۲۵\ \text{تا}} \in N$$

($p = ۹ \times ۵^۴ = ۵۶۲۵$ و $s = ۱۸۷۶$).

از طرف دیگر، عضوهای Q، که فاقد رقم ۱ هستند، رقمهای زیادی ندارند. اگر عضوی از Q، n رقم داشته باشد، با توجه به اینکه دست‌کم یکی از رقمهای آن باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آنگاه

$$p \geqslant ۳ \times ۲^{n-۱}, \quad s \leqslant ۹n$$

بنابراین

$$۲۷n - ۳ \geqslant ۳s - ۳ = p \geqslant ۳ \times ۲^{n-۱}$$

و در نتیجه

$$۹n - ۱ \geqslant ۲^{n-۱}$$

که مطمئناً به‌ازای $n \geqslant ۷$ نادرست است (اثبات این مطلب به استقرا تمرینی ساده است). بنابراین هیچ‌یک از اعضای Q بیش از ۶ رقم ندارد، و در نتیجه Q متناهی است.

می‌توانم بگویم آنچه از حل مسأله مانده بررسی چندین حالت است. شاید همین امر دلیل این است که این مسأله مسألهٔ تیمی خوبی است؛ درحالی‌که عضوی از تیم عددهای ۳ رقمی را بررسی می‌کند، عضو دیگری عددهای ۴ رقمی را بررسی می‌کند، و الی آخر. به هر حال، بنابر بررسیهایی که انجام داده‌ام تنها عضو Q، ۲۹۲ است. از آنجا که بررسی جزئیات این مطلب خسته‌کننده است به مسائل جالبتری می‌پردازیم.

دو مسأله از مسابقات ریاضی اتریش ـ لهستان، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۵. راه‌حل دیگری برای این مسأله در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۹، ۲۶۹، و تذکر مربوط به آن در ۱۹۹۰، ۱۰۱، آمده است.)

مسألهٔ ۱

آیا مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, \cdots, ۳۰۰۰\}$ زیرمجموعه‌ای ۲۰۰۰ عضوی مانند A دارد به‌طوری‌که هیچ عضوی از A دو برابر عضو دیگری از آن نباشد؟

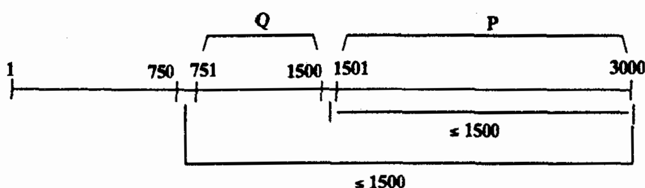
راه‌حل

از آنجا که دو برابر هر عدد صحیح در بازهٔ $P = [۱۵۰۱, ۳۰۰۰]$ بزرگتر از آن است که به مجموعهٔ X تعلق داشته باشد، می‌توانیم این ۱۵۰۰ عدد را بدون نگرانی در مجموعهٔ A قرار دهیم. از طرف دیگر A از P بیش از ۱۵۰۰ عدد صحیح عایدش نمی‌شود، زیرا این مجموعه روی‌هم ۱۵۰۰ عدد صحیح دارد. بدیهی است که باید دقت کنیم عدد صحیحی از بازهٔ $Q = [۷۵۱, ۱۵۰۰]$ انتخاب نشود، زیرا این عدد نصف عددی صحیح است که از P انتخاب شده است. همچنین بدیهی است که انتخاب هر عدد صحیح از Q امکان انتخاب دو برابر آن‌را از P نفی می‌کند. بنابراین اگر k عدد صحیح از Q انتخاب شود نمی‌توانیم بیش از $۱۵۰۰ - k$ عدد از مجموعهٔ P انتخاب کنیم، زیرا نمی‌توانیم روی‌هم بیش از ۱۵۰۰ عدد صحیح از بازهٔ $P \cup Q = [۷۵۱, ۳۰۰۰]$ انتخاب کنیم. بنابراین برای اینکه ۲۰۰۰ عدد صحیح برای A جور کنیم دست‌کم باید ۵۰۰ عدد از بازهٔ $[۱, ۷۵۰]$، یعنی ربع اول مجموعهٔ X، انتخاب کنیم (شکل ۷۹ را ببینید).

استفادهٔ مکرر از این استدلال به نتایج صفحهٔ بعد می‌انجامد.

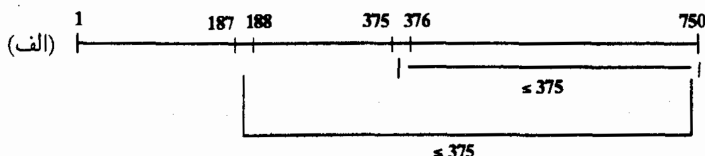
با وجود این، پرسش مسأله نامعقول نیست، زیرا بدیهی است که می‌توانیم برای A،

$$۱۵۰۰ + ۳۷۵ + ۹۴ + ۲۳ + ۶ + ۱ = ۱۹۹۹$$

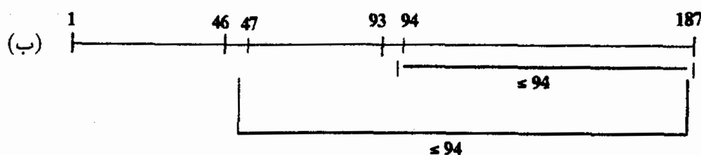


باید دست‌کم ۵۰۰ عدد از بازهٔ [۱, ۷۵۰] انتخاب شود.

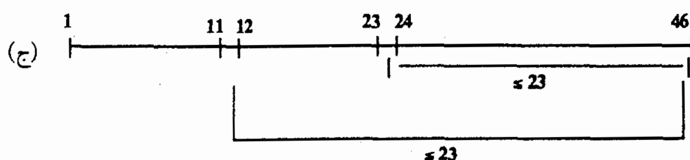
شکل۷۹



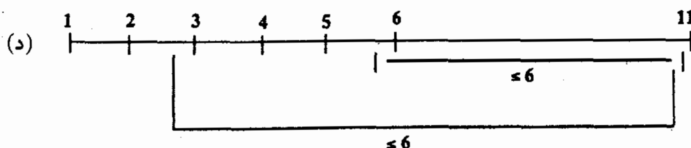
باید دست‌کم ۱۲۵ عدد از بازهٔ [۱, ۱۸۷] انتخاب شود.



باید دست‌کم ۳۱ عدد از بازهٔ [۱, ۴۶] انتخاب شود.



باید دست‌کم ۸ عدد از بازهٔ [۱, ۱۱] انتخاب شود.



باید دست‌کم ۲ عدد از بازهٔ [۱, ۲] انتخاب شود،

و چنین کاری ممکن نیست.

شکل۸۰ (الف ـ د)

عدد صحیح جور کنیم.

از این نتیجه چنین برمی‌آید که $\frac{۲}{۳}$ تعداد عددهای صحیح موجود در X حد اعلای اندازهٔ مجموعهٔ A است؛ به عبارت دیگر، $|A|$ را می‌توان برابر با هر عددی تا حد $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ X گرفت، ولی دقیقاً برابر با $\frac{۲}{۳}|X|$ نمی‌توان. با استفاده از بررسی بالا دربارهٔ مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, \cdots, ۳۰۰\}$ درمی‌یابیم که می‌توان A را ۲۰۰ عضوی گرفت:

$$A = \{\underbrace{۱, ۳, ۴;}_{۳}\ +\ \underbrace{۱۰, ۱۱, \cdots, ۱۸;}_{۹}\ +\ \underbrace{۳۸, ۳۹, \cdots, ۷۵;}_{۳۸}\ +\ \underbrace{۱۵۱, ۱۵۲, \cdots, ۳۰۰}_{۱۵۰ = ۲۰۰}\}$$

ولی این مجموعه تا حد ممکن پر شده است، بنابراین نتیجه می‌گیریم که نتیجهٔ کلی به بیان دقیقتر این است $|A| \leqslant \frac{۲}{۳}|X|$.

موجب خوشوقتی است که اطلاع دهیم بروس رِزنیک (از دانشگاه ایلی‌نوی در اوربانا ـ کمپین)، اخیراً فرمول زیبای زیر را برای ماکسیمم اندازهٔ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ که در آن هیچ عضوی r برابر عضو دیگر نباشد، که آن‌را با $f_r(n)$ نشان می‌دهیم، به‌دست آورده است. اگر نمایش عدد n را در مبنای r بنویسیم، یعنی

$$n = a_m a_{m-۱} \cdots a_۰$$

آنگاه

$$f_r(n) = \frac{۱}{r+۱}\left(m + \sum_{k=۰}^{m}(-۱)^k a_k\right)$$

از آنجا که نمایش عدد $n = ۳۰۰۰$ در مبنای ۲ به‌صورت ۱۰۱۱۱۰۱۱۱۰۰۰ است، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} f_۲(۳۰۰۰) &= \frac{۱}{۳}[۲ \times ۳۰۰۰ + (-۱ + ۱ - ۱ - ۱ + ۱ - ۱^{-۱})] \\ &= \frac{۱}{۳}(۶۰۰۰ - ۳) \\ &= ۱۹۹۹ \end{aligned}$$

که همان نتیجه‌ای است که در بالا به‌دست آمد.

مسألهٔ ۲

فرض کنید نقاط فضای سه بُعدی به سه زیرمجموعهٔ ناتهی مانند $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ افراز شده‌اند. ثابت کنید نقاط دست‌کم یکی از این زیرمجموعه‌ها همهٔ فاصله‌های ممکن را به‌دست می‌دهند، یعنی، ثابت کنید که یکی از زیرمجموعه‌ها، مانند A_i، به‌گونه‌ای است که به‌ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند d، دو نقطه در A_i وجود دارند که فاصلهٔ آنها از یکدیگر برابر با d است.

راه‌حل

بدیهی است که تنها دو امکان وجود دارد: یا

یک) هریک از مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ فاقد این ویژگی است که همهٔ فاصله‌ها را به‌دست دهد؛ و یا

دو) دست‌کم یکی از آنها این ویژگی را دارد.

از آنجا که می‌خواهیم درستی (دو) را ثابت کنیم، ثابت می‌کنیم که (یک) منجر به تناقض می‌شود. بنابراین فرض کنید

الف) $A_۱$ فاصلهٔ $d_۱$ را به‌دست ندهد؛

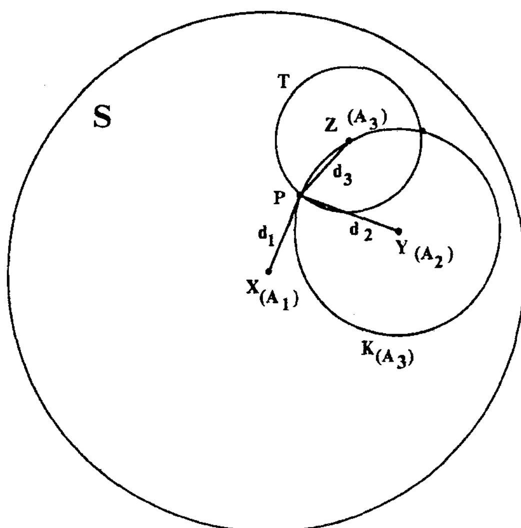
ب) $A_۲$ فاصلهٔ $d_۲$ را به‌دست ندهد؛ و

ج) $A_۳$ فاصلهٔ $d_۳$ را به‌دست ندهد.

بدون کاسته شدن از کلیت استدلال می‌توانیم فرض کنیم $d_۱ \geqslant d_۲ \geqslant d_۳$.

فرض کنید X نقطه‌ای از $A_۱$ و S کره‌ای به مرکز X و به شعاع $d_۱$ باشد (شکل ۸۱ را ببینید). اگر نقطه‌ای روی S به مجموعهٔ $A_۱$ تعلق داشته باشد، مجموعهٔ $A_۱$ فاصلهٔ $d_۱$ را تولید می‌کند که با فرض (الف) تناقض دارد. بنابراین هر نقطهٔ S باید یا به $A_۲$ یا به $A_۳$ تعلق داشته باشد.

اگر هر نقطهٔ S متعلق به $A_۳$ باشد، چون $d_۳ \leqslant d_۱$، مجموعهٔ $A_۳$ فاصلهٔ $d_۳$ را تولید می‌کند که با فرض (ج) تناقض دارد (توجه کنید که وترهای دایره‌های عظیمهٔ S، همهٔ فاصله‌های ممکن را تا حد $۲d_۱$ به‌دست می‌دهند و $۲d_۱$ از $d_۳$ بزرگتر است). بنابراین نقطه‌ای از S مانند Y باید به $A_۲$ تعلق داشته باشد.



شکل ۸۱

اینک، چون (شعاع $S =$) $d_1 \leqslant d_2$، کره‌ای به مرکز Y و به شعاع d_2، کرهٔ S را در دایره‌ای مانند K قطع می‌کند و هیچ نقطه‌ای از K به A_2 تعلق ندارد و این نتیجه با فرض (ب) تناقض ندارد. از آنجا که هر نقطهٔ S به یکی از دو مجموعهٔ A_2 و A_3 تعلق دارد، سپس K باید تماماً در مجموعهٔ A_3 باشد.

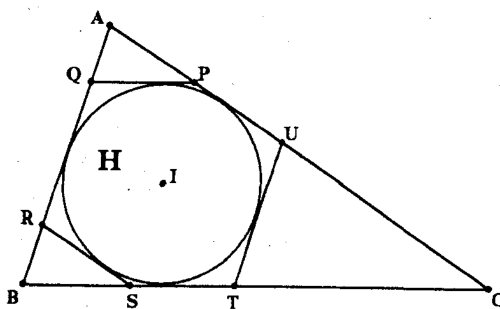
در نهایت، کرهٔ T به شعاع d_3 و به مرکز نقطهٔ دلخواه Z از K، دایرهٔ K را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کند که این نقطه

اگر روی S باشد فاصله‌اش از X برابر با d_1 است،
اگر روی K باشد فاصله‌اش از Y برابر با d_2 است، و
اگر روی T باشد فاصله‌اش از Z برابر با d_3 است.

بنابراین نقطهٔ P در هر مجموعه‌ای که باشد یکی از فرضهای ما را نقض می‌کند و به این ترتیب استدلال کامل می‌شود.

ویژگی جالبی از دایرهٔ محاطی مثلث

(مسألهٔ ۱۲۴۵، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۸۹)



شکل۸۲

فرض کنید شش‌ضلعی $H = PQRSTU$ از رسم مماسهایی بر دایرهٔ محاطی $\triangle ABC$ به موازات ضلعهای آن پدید آمده است. ثابت کنید محیط H هرگز از $\frac{2}{3}$ محیط $\triangle ABC$ بیشتر نمی‌شود.

این مسأله از والتر یانوش از دبیرستان اورسولینن شهر اینسبروک در کشور اتریش، و راه‌حل آن از هانس اِنگل‌هاوپت[1] از شهر گوندلس‌هیم در کشور آلمان است.

راه‌حل

از آنجا که با نگاهی سطحی به شکل ۸۲ احساس می‌کنیم ضلعهای H طولهای متفاوتی دارند و زاویه‌های نامشخصی با یکدیگر می‌سازند، بعید نیست این مطلب را که ضلعهای مقابل در H همطول‌اند نادیده بگیریم. با استفاده از نیمدوری حول مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، I، به‌آسانی قانع می‌شویم که این مطلب درست است. برای مثال، ضلعهای RQ و QP، روی خطهای موازی با آنها و شامل ضلعهای مقابل آنها، UT و TS، قرار می‌گیرند، و در نتیجه نقطه تقاطع آنها، Q، باید به نقطه تقاطع این خطها،

1. Hans Engelhaupt

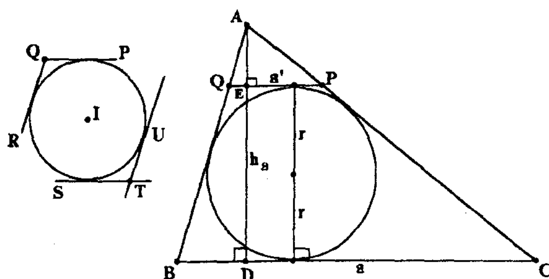
یعنی T، منتقل شود. به همین ترتیب، P به S منتقل می‌شود و در نتیجه $QP = TS$.

اگر طول مماسها برابر باشند با $PQ = a'$، $RS = b'$ و $TU = c'$، آنگاه $a' + b' + c'$ برابر با نصف محیط H است و نسبت موردنظر، L، برابر است با

$$L = \frac{\text{محیط } H}{\text{محیط } \triangle ABC} = \frac{\text{نصف محیط } H}{\text{نصف محیط } \triangle ABC} = \frac{a' + b' + c'}{s}$$

اگر AD ارتفاع نظیر رأس A و طولش h_a باشد (شکل ۸۳ را ببینید)، آنگاه، چون QP موازی با BC است، مثلث AQP با $\triangle ABC$ متشابه است و

$$\frac{QP}{BC} = \frac{a'}{a} = \frac{\text{طول ارتفاع } AE}{\text{طول ارتفاع } AD} = \frac{h_a - DE}{h_a} = \frac{h_a - ۲r}{h_a} = ۱ - \frac{۲r}{h_a}$$



شکل۸۳

با توجه به این دستور معروف که $rs =$ (مساحت مثلث)، می‌توان نوشت $rs = \frac{۱}{۲}ah_a$، و در نتیجه $\frac{a}{s} = \frac{۲r}{h_a}$. بنابراین

$$\frac{a'}{a} = ۱ - \frac{a}{s}$$

و

$$a' = a - \frac{a^۲}{s}$$

اگر عبارتهای مشابهی را در مورد b' و c' در نظر بگیریم، نسبت مطلوب به‌صورت زیر درمی‌آید

$$L = \frac{a - \frac{a^۲}{s} + b - \frac{b^۲}{s} + c - \frac{c^۲}{s}}{s} = \frac{a + b + c - \frac{۱}{s}(a^۲ + b^۲ + c^۲)}{s}$$

و چون $a + b + c = ۲s$، پس

$$L = ۲ - \frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{s^۲} = ۲ - \frac{۴(a^۲ + b^۲ + c^۲)}{(a + b + c)^۲}$$

کافی است کرانی برای $\frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{(a + b + c)^۲}$ بیابیم.

در اینجا هانس اِنگل‌هاوپت با زیرکی به این نکته توجه دارد که هر مجموعی از مربعات عددی نامنفی است، و در نتیجه

$$(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲ \geqslant ۰$$

پس از بسط دادن و جابه‌جا کردن جمله‌ها به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} ۲(a^۲+b^۲+c^۲) &\geqslant ۲ab+۲bc+۲ac \\ &= (a+b+c)^۲-(a^۲+b^۲+c^۲) \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$۳(a^۲+b^۲+c^۲) \geqslant (a+b+c)^۲$$

و

$$\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{(a+b+c)^۲} \geqslant \frac{۱}{۳}$$

(این نابرابری را می‌توان مستقیماً با استفاده از نابرابری میانگین نمایی نیز به‌دست آورد.)
بنابراین

$$L \leqslant ۲-۴\left(\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۲}{۳}$$

که همان نتیجهٔ مطلوب است.

مسأله‌ای دربارهٔ سقفها و کفها

(مسألهٔ ۱۰۸۱، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۹۳)

اغلب اعداد حقیقی غیرصحیح در مسائلی ظاهر می‌شوند که در آنها تنها به عددهای صحیح علاقه‌مندیم. برای مثال، اگر بدانیم که n عددی صحیح است، شرط $n \geqslant ۶/۲۵$ بر شرط $n \geqslant ۶$ ارجحیتی ندارد. به همین ترتیب نابرابری $n \leqslant ۶/۲۵$ چیزی بیش از $n \leqslant ۷$ به ما نمی‌گوید. در ترکیبیات همواره اعداد را به بالا یا به پایین گرد می‌کنیم. نتیجهٔ این کارها تابعهایی به‌نام تابعهای کف و سقف است که آنها را به‌صورت زیر نشان می‌دهند

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا برابر با x = کف x = $\lfloor x \rfloor$ یا $[x]$
(گرد کردن به پایین)
کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از یا برابر با x = سقف x = $\lceil x \rceil$
(گرد کردن به بالا)

بنابراین

$$\lfloor ۶/۲۵ \rfloor = ۶, \quad \lceil ۶/۲۵ \rceil = ۷$$

مسائل جالبی شامل $\lfloor x \rfloor$ و $\lceil x \rceil$ وجود دارند که برخی از آنها تا حدی آزاردهنده‌اند، زیرا ما علاقهٔ زیادی به استفاده از پیوستگی اعداد حقیقی داریم. به‌هرحال، امیدوارم که از مسألهٔ زیبای زیر که مربوط به لورن لارسُن (ازکالج سنت اولاف، نورث‌فیلد، مینه‌سوتا) است، لذت ببرید. راه‌حل مسأله، از سوی مارگالیوت است، که در هنگام حل این مسأله، دانش‌آموز کلاس ۱۱ دبیرستان ا. ب. لوکاس در شهر لندن از ایالت اُنتاریو (کانادا) بوده است.

b عددی صحیح است و $b > ۱$. مقدار انتگرال زیر چیست؟

$$I = \int_{۰}^{\infty} \left\lfloor \log_b \left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor \right\rfloor dx$$

راه‌حل

شاید بتوانیم از این حقیقت استفاده کنیم که انتگرالده، $e(x)$، عددی صحیح است، زیرا به‌نظر می‌رسد که این تابع تابع پله‌ای خاصی باشد. از آنجا که معمولاً بهتر است برای آشنایی با تابعی ناآشنا چند مقدار از آن‌را حساب کنیم، بیایید ببینیم که مقدار این تابع مثلاً به‌ازای $x = ۶/۲۵$ چه می‌شود. در این مورد

$$\lceil x \rceil = ۷, \ \frac{\lceil x \rceil}{x} = \frac{۷}{۶/۲۵}$$

پس $\frac{\lceil x \rceil}{x}$ عددی بین ۱ و ۲ است و در نتیجه $\left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor = ۱$. بنابراین مقدار b هر چه باشد،

$$\log_b ۱ = ۰$$

و در نتیجه

$$\lfloor \log_b ۱ \rfloor = ۰, \ \ e(۶/۲۵) = ۰$$

در حقیقت، به‌ازای هر x، $۱ \leqslant x$، به همین نتیجه می‌رسیم، زیرا مقدار گردشده به بالای هر x، $۱ \leqslant x$، هرگز بیشتر از $۲x$ نمی‌شود، و بنابراین $\lceil x \rceil / x$ عددی بین ۱ و ۲ است (ممکن است برابر با ۱ باشد ولی همواره کمتر از ۲ است) و در نتیجه کفِ آن برابر با ۱ و لگاریتم کفِ آن برابر با ۰ است و $e(x) = ۰$. بنابراین می‌توانیم از همهٔ xهایی که $۱ \leqslant x$ صرفنظر کنیم، زیرا

$$I = \int_۰^\infty e(x)dx = \int_۰^۱ e(x)dx$$

باید دقت کنیم که انتگرالده در $x = ۰$ تعریف نشده است (زیرا $(۰/۰ = ۰/\lceil ۰ \rceil)$)، و در نتیجه انتگرال موردنظر انتگرالی ناسره است و در حقیقت مقدار آن برابر است با

$$I = \lim_{a \to ۰^+} \int_a^۱ e(x)dx$$

با وجود این لازم نیست با فرایند حدی عذاب‌آور بالا سروکار داشته باشیم، زیرا همان‌طور که خواهیم دید، این ناپیوستگی در $x = ۰$ هیچ مسأله‌ای ایجاد نمی‌کند.

به‌ازای همهٔ xهایی که $x < ۱$، بدیهی است که $\lceil x \rceil = ۱$ و بنابراین $\frac{\lceil x \rceil}{x} > ۱$، و در نتیجه $\left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor$ عددی طبیعی است.

از آنجا که لگاریتم در پایهٔ b همهٔ عددهای واقع بین b^k و $b^{k+۱}$ بین k و $k + ۱$ قرار دارد، گردشدهٔ به پایین همهٔ آنها عدد صحیح k است. به عبارت دیگر، به‌ازای xهایی که

$$\left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor = b^{k \cdot abc \cdots} \ \text{یعنی،} \ b^k \leqslant \left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor < b^{k+۱}$$

انتگرالده برابر است با

$$e(x) = \left\lfloor \log_b \left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor \right\rfloor = \lfloor \log_b (b^{k \cdot abc \cdots}) \rfloor = \lfloor k \cdot abc \cdots \rfloor = k$$

بنابراین به‌ازای هر xای که در نابرابریهای

$$b^k \leqslant \left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor < b^{k+1}$$

صدق کند، $e(x) = k$.

حال، y بیش از ۱ واحد از $\lfloor y \rfloor$ بزرگتر نیست، و در نتیجه اگر $a \leqslant \lfloor y \rfloor < b$، که در آن a و b عددهایی صحیح‌اند، آنگاه $a \leqslant y < b$. در نتیجه نابرابریهای بالا معادل‌اند با

$$b^k \leqslant \frac{\lceil x \rceil}{x} < b^{k+1}$$

با یادآوری این مطلب که به‌ازای هر x در بازهٔ $(0, 1]$، $\lceil x \rceil = 1$، درمی‌یابیم که این شرایط به‌ازای xهایی که در نابرابریهای

$$b^k \leqslant \frac{1}{x} < b^{k+1}$$

صدق می‌کنند، یعنی xهایی که در بازهٔ

$$\frac{1}{b^k} \geqslant x > \frac{1}{b^{k+1}}$$

قرار دارند، برقرار است. در نتیجه، با مدّنظر قرار دادن همهٔ نقاط انتهایی بازه، وقتی‌که x روی محور و به طرف مبدأ از $\frac{1}{b^k}$ به طرف $\frac{1}{b^{k+1}}$ حرکت می‌کند، مقادیر $e(x)$ به شکل زیر است:

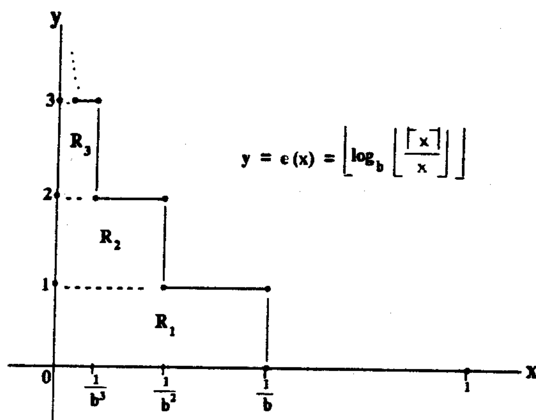
وقتی‌که x از ۱ به طرف $\frac{1}{b}$ می‌رود $e(x) = 0$،
وقتی‌که x از $\frac{1}{b}$ به طرف $\frac{1}{b^2}$ می‌رود $e(x) = 1$،
وقتی‌که x از $\frac{1}{b^2}$ به طرف $\frac{1}{b^3}$ می‌رود $e(x) = 2$،
....

بنابراین $e(x)$ تابعی پله‌ای است که شکلش در شکل ۸۴ نشان داده شده است.

ساده‌ترین راه محاسبهٔ انتگرال I که سطح زیر نمودار منحنی $e(x)$ است، افراز بازهٔ مورد بحث به مستطیلهایی مانند R_1، R_2، $\cdots$، است که بلندی آنها برابر با واحد و طول قاعده‌هایشان $\frac{1}{b}$، $\frac{1}{b^2}$، $\frac{1}{b^3}$، $\cdots$، است، و در شکل مشخص شده‌اند.

بنابراین

$$I = \int_0^1 e(x)dx = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^3} + \cdots$$



شکل۸۴

که در آن فرایند حدی ناشی از ناپیوستگی در $x = ۰$، با ادامه دادن سری تا بی‌نهایت جایگزین شده است. در نهایت

$$I = \frac{\frac{۱}{b}}{۱ - \frac{۱}{b}} = \frac{۱}{b - ۱}$$

دو مسأله از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۱۰)

مسألهٔ ۱

به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، $n \geqslant ۳$، ثابت کنید مجموعه‌ای متشکل از n نقطه در صفحه وجود دارد به‌طوری‌که

الف) فاصلهٔ بین هر دو نقطه از این نقاط عددی گنگ است، و

ب) هر سه نقطه از این نقاط مثلثی ناتباهیده با مساحت گویا تشکیل می‌دهند.

نمی‌دانم که ممتحنان از نحوهٔ برخورد شرکت‌کنندگان با این مسأله چه تصوری داشته‌اند، اما توجیهم از راه‌حل خودم این است که راستش را بخواهید در یافتنش بسیار خوش‌اقبال بوده‌ام.

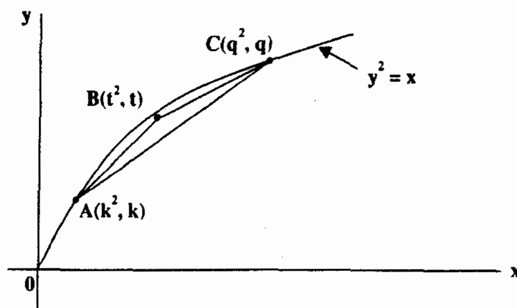
راه‌حل

از آنجا که هر سه نقطه از نقاط باید مثلثی ناتباهیده پدید آورند، بدیهی است که هیچ سه‌نقطه‌ای روی یک خط راست قرار ندارند. بنابراین، این احتمال وجود دارد که چنین نقاطی را بتوان روی منحنی شناخته شده‌ای مانند دایره یافت. با وجود این به‌نظر می‌رسد که نمایش معمول نقاط واقع بر دایره، یعنی $(r\cos\theta, r\sin\theta)$، احتمالاً به عبارتهای پیچیده‌ای دربارهٔ فاصله‌ها و مساحتها می‌انجامد. هنگام طراحی منحنیی با پارامترهای ساده‌تر، سهمی مورد علاقه‌ام، یعنی $x = y^۲$، به ذهنم خطور کرد. مشخص کردن نقاط $A(k^۲, k)$، $B(t^۲, t)$ و $C(q, q^۲)$ روی این منحنی کار ساده‌ای بود و خوش‌اقبالی موجب شد که همه چیز به‌طور شگفت‌آوری به‌سرعت و به‌آسانی حل شد.

بدیهی است که

$$AB = \sqrt{(k^۲ - t^۲)^۲ + (k-t)^۲}$$

$$= (k-t)\sqrt{(k+t)^۲ + ۱}$$



شکل۸۵

و سمت راست این برابری به‌ازای عددهای طبیعی و نابرابر k و t مقداری گنگ است ($(k+t)^{۲}$ مربع کامل است، و در نتیجه عدد صحیح بعد از آن، $(k+۱)^{۲}+۱$، مربع کامل نیست). چون دترمینان

$$D=\begin{vmatrix} k^{۲} & k & ۱ \\ t^{۲} & t & ۱ \\ q^{۲} & q & ۱ \end{vmatrix}$$

اگر q، t و k عددهایی صحیح باشند، عددی صحیح است، مساحت $\triangle ABC$ که دقیقاً برابر با $\left|\frac{۱}{۲}D\right|$ است، همواره گویاست.

بنابراین مجموعهٔ قابل قبولی متشکل از n نقطه مجموعهٔ زیر است

$$\left\{(۱^{۲},۱),(۲^{۲},۲),(۳^{۲},۳),\cdots,(n^{۲},n)\right\}$$

مسألهٔ ۲

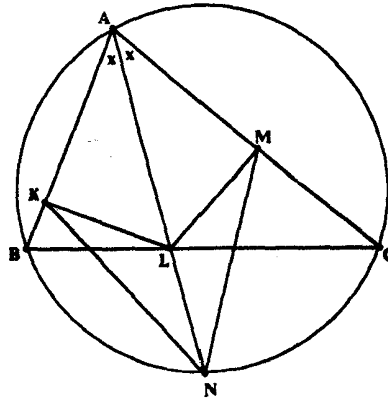
فرض کنید نیمساز زاویهٔ A در مثلث حادهٔ ABC ضلع BC را در L و دایرهٔ محیطی مثلث را در N قطع کند. فرض کنید از L عمودهای LK و LM به‌ترتیب بر ضلعهای AB و AC رسم شده‌اند. ثابت کنید مساحت چهارضلعی $AKNM$ و مساحت مثلث ABC یکی است:

$$\text{مساحت}\ (\triangle ABC) = \text{مساحت}\ (AKNM)$$

راه‌حل

احتمالاً نخستین مطلبی که توجه ما را به خود جلب می‌کند این است که مثلثهای AKL و AML همنهشت‌اند (به حالت وزض) و در نتیجه

$$KL=LM$$



شکل۸۶

چون KL و LM ارتفاعهای دو مثلثی هستند که AL، $\triangle ABC$ را به آن‌دو تقسیم کرده است، پس

$$\text{مساحت } (\triangle ABC) = \tfrac{1}{2}AB \times KL + \tfrac{1}{2}AC \times LM$$
$$= \tfrac{1}{2}c \times KL + \tfrac{1}{2}b \times KL$$
$$= \tfrac{1}{2}(c+b)KL$$

اینک از همنهشتی مثلثها نتیجه می‌شود $AK = AM$، و در نتیجه AL نیمساز زاویهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین AKM است. بنابراین AL درواقع عمودمنصف قاعدهٔ KM است و در نتیجه این پاره‌خط را در وسط آن، Q، و تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کند (شکل ۸۷). بنابراین $KQ = QM$ و در نتیجه

$$\text{مساحت } (AKNM) = \text{مساحت } (\triangle AKN) + \text{مساحت } (\triangle AMN)$$
$$= \tfrac{1}{2}AN \times KQ + \tfrac{1}{2}AN \times QM$$
$$= AN \times KQ$$

حال چون زاویه‌های K و M قائمه‌اند، پس چهارضلعی $AKLM$ محاطی است و چون LM وتر دایرهٔ محیطی آن است،

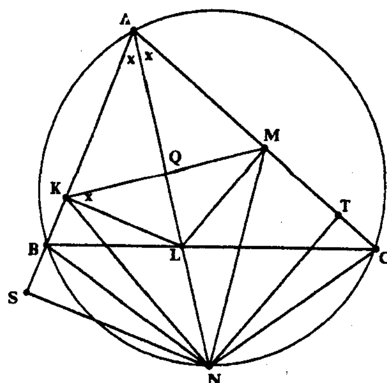
$$\angle LKM = \angle LAM = \tfrac{1}{2}\angle A = x$$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ KLQ،

$$KQ = KL\ \cos x$$

و در نتیجه

$$\text{مساحت } (AKNM) = AN \times KL \cos x$$



شکل۸۷

می‌خواهیم ثابت کنیم

$$(\triangle ABC)\ \text{مساحت} = \tfrac{۱}{۲}(c+b)KL = AN \times KL\cos x$$

یعنی

$$b+c = ۲AN\cos x$$

مقدار $AN\cos x$ به‌وضوح برابر است با طول ضلع AT از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که با رسم عمود NT بر ضلع AC پدید می‌آید، و نیز برابر است با طول ضلع AS از مثلث قائم‌الزاویهٔ NAS (شکل ۸۷ را ببینید). در نتیجه

$$۲AN\cos x = TA + AS$$

می‌خواهیم ثابت کنیم

$$TA + AS = b + c$$

اینک می‌توان نوشت

$$b + c = CA + AB$$

و اگر سمت راست این برابری همان $TA + AS$ باشد، CT باید برابر با BS شود؛ و بر عکس، اگر بتوانیم ثابت کنیم $CT = BS$ نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. ولی به‌آسانی معلوم می‌شود که $CT = BS$، زیرا CT و BS ضلعهای متناظر در مثلثهای همنهشت NCT و NBS هستند:

وترهای NC و NB دو وتر مساوی از دایرهٔ محیطی‌اند، زیرا روبه‌رو به زاویه‌هایی برابر در رأس A هستند، و در مثلثهای همنهشت NAS و NAT (ززض)، $NT = NS$.

مسأله‌ای دربارهٔ تصاعدهای حسابی

(مسألهٔ ۱۱۶۶ (تکراری)، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۲۴، پیشنهاد شده از سوی کنت ویلیامز، دانشگاه کارلتون، اُتاوا، کانادا)

برخی از تصاعدهای حسابی از عددهای طبیعی شامل مربعهایی کامل‌اند و برخی چنین نیستند. برای مثال،

۴, ۱۰, ۱۶, ۲۲, ... به‌وضوح شامل ۴ و ۱۶ است، و

۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, ... شامل هیچ مربع کاملی نیست.

ثابت کنید که اگر تصاعد a، $a+d$، $a+۲d$، ...، شامل مربعی کامل باشد، یکی از جمله‌هایی که مربع کامل است باید پیش از اینکه تصاعد به عدد

$$N = a + ۲d\sqrt{a} + d^۲$$

برسد ظاهر شود.

راه‌حل

راه‌حل زیر از والتر یانوش از کشور اتریش است.

باید ثابت کنیم که اگر تصاعد موردنظر شامل مربعی کامل مانند $k^۲$ باشد، باید شامل مربعی کامل باشد که از N کوچکتر است. با توجه به اینکه

$$N = a + ۲d\sqrt{a} + d^۲ = (\sqrt{a} + d)^۲$$

باید جمله‌ای مانند $x^۲$ بیابیم که $x^۲ < (\sqrt{a}+d)^۲$، و یا $x < \sqrt{a} + d$.

فرض کنید جمله‌ای برابر با $k^۲$ داشته باشیم، یعنی به‌ازای nای، $n \geqslant ۰$،

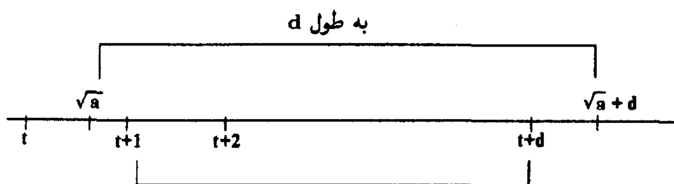
$$a + nd = k^۲$$

بدیهی است که در این صورت

$$k^۲ \equiv a \ (\text{به‌پیمانهٔ } d)$$

اکنون، چون طول بازهٔ $[\sqrt{a}, \sqrt{a}+d)$، d و خودش در یک انتها بسته است، باید شامل d طبیعی مانند $t+۱$، $t+۲$، $\cdots$ و $t+d$ باشد (اگر $\sqrt{a}$ عددی صحیح باشد، آنگاه $\sqrt{a} = t+۱$.) از آنجا که هر d عدد صحیح متوالی مجموعه‌ای کامل از مانده‌ها به‌پیمانهٔ d تشکیل می‌دهند، عدد صحیح k باید با عدد صحیحی مانند x در این بازه همنهشت باشد:

$$x \equiv k \ (\text{به‌پیمانهٔ } d)$$



شکل۸۸

بنابراین

$$x^۲ \equiv k^۲ \equiv a \ (\text{به‌پیمانهٔ } d)$$

و در نتیجه به‌ازای nای، $n \geqslant ۰$،

$$x^۲ = a + nd$$

به‌عبارت دیگر، $x^۲$ جمله‌ای از تصاعد است و چون در بازهٔ $[\sqrt{a}, \sqrt{a}+d)$ قرار دارد،

$$x < \sqrt{a} + d$$

و در نتیجه

$$x^۲ < (\sqrt{a}+d)^۲ = N$$

در مورد مثالی که آوردیم،

$$۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, ۳۱, ۳۸, ۴۵, ۵۲, ۵۹, ۶۶, ۷۳, ۸۰, \cdots$$

$$N = ۳ + ۱۴\sqrt{۳} + ۴۹ < ۷۷$$

و چون این تصاعد شامل هیچ مربع کاملی کوچکتر از N نیست، پس به‌طور کلی شامل هیچ مربع کاملی نیست.

از ویژگیهای مثلثهایی که زاویه‌ای 30° دارند

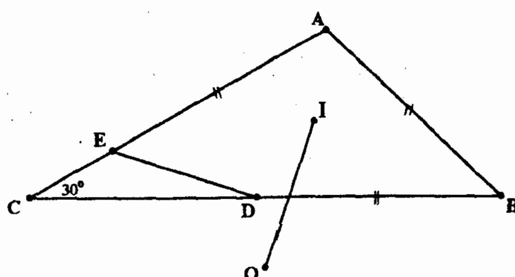
(مسألهٔ ۱۱۰۰، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۱۶۰)

طبق معمول، فرض کنید I و O به‌ترتیب مرکز دایره‌های محاطی و محیطی $\triangle ABC$ باشند. فرض کنید $\angle C = 30^\circ$ و به‌اندازهٔ طول ضلع AB روی هریک از دو ضلع دیگر جدا کرده‌ایم تا نقاط D و E به‌دست آیند:

$$EA = AB = BD$$

ثابت کنید پاره‌خط DE برابر با IO و بر آن عمود است.

این مسأله از د. ج. اسمینک از کشور هلند است و برهان زیبای زیر از هیده‌توسی فوکاگاوا از کشور ژاپن است که کتابش به‌نام مسائل هندسی معابد ژاپنی که با همکاری دَن پِدو نوشته شده است اثر تاریخی مهمی است.



شکل۸۹

راه‌حل

فرض کنید AI را امتداد دهیم تا دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ را در F قطع کند. چون I مرکز دایرهٔ محاطی است، IA نیمساز $\angle A$ است، و چون $\triangle EAB$ متساوی‌الساقین است، این نیمساز قاعده را در وسط

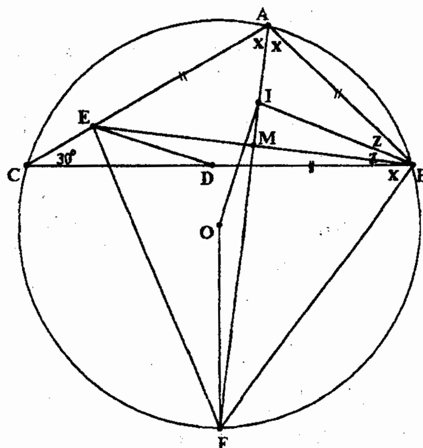
آن، M، قطع می‌کند و در حقیقت عمودمنصف قاعدهٔ EB است. در نتیجه نقطهٔ F که بر این عمودمنصف واقع است از نقاط E و B به یک فاصله است:

$$EB = FB$$

همچنین $\triangle EFA \equiv \triangle BFA$ (ض‌زض)، و بنابراین $\angle EFA = \angle BFA$، و در نتیجه $\angle EFB = 2\angle AFB$. ولی $\angle AFB = \angle C$، زیرا هردو مقابل به وتر AB هستند و در نتیجه

$$\angle EFB = 2(30^\circ) = 60^\circ$$

بنابراین در مثلث EFB زاویهٔ بین ضلعهای برابر، EF و FB، 60° است. بنابراین مثلث EFB متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه $FB = EB$.



شکل ۹۰

اینک به‌سادگی معلوم می‌شود که $\triangle IBF$ متساوی‌الساقین است، زیرا هریک از زاویه‌های I و B برابر است با $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$: $\angle CAF = \angle CBF$، زیرا هردو مقابل به وتر CF هستند، و در نتیجه $\angle CBF = \frac{1}{2}A$؛ چون IB زاویهٔ B را نصف می‌کند، پس $\angle IBF = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$. ولی در $\triangle AIB$ هم زاویهٔ خارجی FIB برابر با $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ است. بنابراین $FB = FI$ و چون در مثلث متساوی‌الاضلاع EBF، $FB = EB$، پس

$$FI = BE \qquad (1)$$

اینک با استفاده از این نتیجه ثابت می‌کنیم که مثلثهای FIO و BED همنهشت‌اند، که از آن حکم موردنظر مسأله به‌سادگی نتیجه می‌شود. چون AI نیمساز $\angle A$ است، F باید وسط کمان CB باشد و در نتیجه FO بر وتر CB عمود است. اگر به‌یاد آوریم که IF عمودمنصف EB است، معلوم

می‌شود که ضلعهای زاویه‌های IFO و EBD بر یکدیگر عمودند، و در نتیجه این دو زاویه با هم برابرند:

$$\angle OFI = \angle EBD \qquad (۲)$$

اینک، می‌دانیم که زاویهٔ C نصف زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر AB است، و در نتیجه $\angle AOB = ۲\angle C = ۶۰^\circ$. چون شعاعهای OA و OB برابرند، پس $\triangle AOB$ متساوی‌الاضلاع است، و نتیجه می‌گیریم که شعاع دایرهٔ محیطی، چیزی بجز طول AB نیست. در نتیجه

$$OF = AB = BD \qquad (۳)$$

بنابراین در مثلثهای OFI و EBD دو ضلع و زاویهٔ بین آنها برابرند (بنابر (۱)، (۲) و (۳))؛ در نتیجه این مثلثها همنشهت‌اند و $IO = ED$.

از این مطلب همچنین نتیجه می‌شود $\angle FIO = \angle BED$. چون ضلعهای IF و EF از این زاویه‌های برابر برهم عمودند، ضلعهای دیگر آنها، IF و EB، نیز باید برهم عمود باشند، زیرا اگر IF و EB را به‌ترتیب حول I و E به یک اندازه و در یک جهت (در شکل ۹۰ در جهت ساعتگرد) دوران دهیم تا روی ضلعهای IO و ED قرار گیرند، تعامد حفظ می‌شود.

مسأله‌ای از مسابقات بهاری بلغارستان (کلاس ۱۱)، ۱۹۸۵

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۱۳۸)

اگر

$$S_n = \sum_{k=۰}^{n} \binom{۳n}{۳k} = \binom{۳n}{۰} + \binom{۳n}{۳} + \binom{۳n}{۶} + \cdots + \binom{۳n}{۳n}$$

ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{۱/۳n} = ۲$$

راه‌حل

بدیهی است که S_n مجموع دو تا در میان ضریبهای دوجمله‌ای در سری زیر است

$$(۱+x)^{۳n} = \binom{۳n}{۰} + \binom{۳n}{۱}x + \binom{۳n}{۲}x^{۲} + \cdots + \binom{۳n}{۳n}x^{۳n}$$

به‌ازای $x = ۱$، مجموع همهٔ این ضریبها به‌دست می‌آید و مسأله این است که چگونه می‌توانیم از دست دوسوم اضافی آنها خلاص شویم.

نسبتاً روشن است که چگونه می‌توان سری

$$f(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + \cdots$$

را «نصف» کرد. از برابریهای

$$f(۱) = a_۰ + a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots$$

و

$$f(-۱) = a_۰ - a_۱ + a_۲ - a_۳ + - \cdots$$

به‌دست می‌آوریم

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots = \frac{1}{2}[f(1) + f(-1)]$$

و

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots = \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)]$$

ولی روشن نیست که چگونه می‌توان سریها را تثلیث و یا به‌طورکلی به چندین بخش تقسیم کرد.

با وجود این، توجه کنید که مقادیر ۱ و ۱− که در فرایند نصف کردن به‌جای x قرارگرفتند چیزی بجز دو ریشهٔ دوم واحد نیستند. آیا این امکان وجود دارد که سه ریشهٔ سوم واحد، یعنی ۱، ω و ω^2، که در اینجا $\omega = e^{2\pi i/3}$، در تثلیث سری مفید باشند؟ به‌نظر می‌رسد این‌طور نیست، زیرا دو تا از این ریشه‌ها حتی عددهایی حقیقی نیستند. در هر حال، چون این عددها ریشه‌های معادلهٔ $x^3 - 1 = 0$ هستند، می‌دانیم که

$$\omega^3 = 1,\ \ \omega^{3k} = 1,\ \ 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

اگر به‌طور متوالی مقادیر ۱، ω و ω^2 را به‌جای x قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$(1+1)^{3n} = \binom{3n}{0} + \cdots + \binom{3n}{3k} \times 1 + \binom{3n}{3k+1} \times 1 + \binom{3n}{3k+2} \times 1 + \cdots$$

$$(1+\omega)^{3n} = \binom{3n}{0} + \cdots + \binom{3n}{3k}\omega^{3k} + \binom{3n}{3k+1}\omega^{3k+1} + \binom{3n}{3k+2}\omega^{3k+2} + \cdots$$

$$(1+\omega^2)^{3n} = \binom{3n}{0} + \cdots + \binom{3n}{3k}\omega^{6k} + \binom{3n}{3k+1}\omega^{6k+2} + \binom{3n}{3k+2}\omega^{6k+4} \cdots$$

با توجه به اینکه

$$\omega^{3k} = \omega^{6k} = 1,\ \ \omega^{3k+1} = \omega^{6k+1} = \omega$$

$$\omega^{3k+2} = \omega^{6k+2} = \omega^2,\ \ \omega^{6k+4} = \omega$$

ضریبهای $\binom{3n}{3k}$، $\binom{3n}{3k+1}$ و $\binom{3n}{3k+2}$ در مجموع این سریها به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$1 + \omega^{3k} + \omega^{6k} = 3,\ \ 1 + \omega^{3k+1} + \omega^{6k+2} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

و

$$1 + \omega^{3k+2} + \omega^{6k+4} = 1 + \omega^2 + \omega = 0$$

در نتیجه مجموع $2^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n}$ همان $3S_n$ است و در نتیجه

$$S_n = \frac{1}{3}[2^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n}]$$

چون $1 + \omega + \omega^2 = 0$، پس $1 + \omega = -\omega^2$ و $1 + \omega^2 = -\omega$، و در نتیجه

$$S_n = \frac{1}{3}[2^{3n} + (-1)^{3n}\omega^{6n} + (-1)^{3n}\omega^{3n}]$$

$$= \frac{۱}{۳}[۲^{۳n} + (-۱)^{۳n} \times ۲]$$
$$= \frac{۱}{۳}[۲^{۳n} \pm ۲]$$

که در آن انتخاب علامتهای + و − به زوج یا فرد بودن n بستگی دارد.

بنابراین در هر صورت

$$\frac{۱}{۳}(۲^{۳n} - ۲) \leqslant S_n \leqslant \frac{۱}{۳}(۲^{۳n} + ۲)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۳}\left(۱ - \frac{۲}{۲^{۳n}}\right) \leqslant \frac{S_n}{۲^{۳n}} \leqslant \frac{۱}{۳}\left(۱ + \frac{۲}{۲^{۳n}}\right)$$

و

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۱/۳n}\left(۱ - \frac{۲}{۲^{۳n}}\right)^{۱/۳n} \leqslant \frac{S_n^{۱/۳n}}{۲} \leqslant \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۱/۳n}\left(۱ + \frac{۲}{۲^{۳n}}\right)^{۱/۳n}$$

اینک، به‌ازای $۱ > |x| > ۰$، $\lim_{n\to\infty} x^{۱/۳n} = ۱$، و به‌ازای $۱ < |x|$ نیز $\lim_{n\to\infty} x^{۱/۳n} = ۱$. بنابراین، هنگامی‌که $n \to \infty$، نتیجه می‌گیریم $\lim S_n^{۱/۳n}/۲ = ۱$. که در نتیجه $\lim S_n^{۱/۳n} = ۲$.

استدلال بالا را، دربارهٔ تثلیث سری، می‌توان به حالت کلی، تقسیم به چندین بخش، تعمیم داد. برای دیدن اثبات مشروحی از نتیجه‌ای کلی که در زیر آمده است، گوهرهای ریاضی، III، جلد ۹ از سری دُلچیانی، MAA، ۱۹۸۵، صفحهٔ ۲۱۰ را ببینید.

دستور کلی

فرض کنید

$$f(x) = f_۰ + f_۱x + f_۲x^۲ + \cdots$$

سریی متناهی یا نامتناهی باشد. در این صورت مجموع $n - ۱$ تا در میان جمله‌هایی که از جملهٔ f_jx^j، $j \leqslant n - ۱$، آغاز می‌شوند، از دستور

$$S(n,j) = \frac{۱}{n}\sum_{t=۰}^{n-۱}\omega^{-jt}f(\omega^t x)$$

به‌دست می‌آید که در آن $\omega = e^{۲\pi i/n}$، یعنی ω ریشه‌ای nام از واحد است.

مسأله‌ای استفاده نشده از المپیاد بین‌المللی؛ از انگلستان

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۷۷، راه‌حل از آگ بوندسن[1]، مدرسهٔ سلطنتی مطالعات آموزشی دانمارک، کپنهاگ)

ثابت کنید حاصل‌ضرب پنج عدد طبیعی متوالی هیچ‌گاه مربع کامل نمی‌شود.

راه‌حل

از آنجا که عددهای زوج و فرد یکی‌درمیان در دنبالهٔ اعداد صحیح آمده‌اند، در هر رشته‌ای متشکل از پنج عدد طبیعی متوالی، باید دست‌کم دو عدد زوج وجود داشته باشد، و ممکن است سه عدد زوج وجود داشته باشد. به همین ترتیب، هر رشته‌ای از این نوع باید دست‌کم شامل یک مضرب سه باشد، و ممکن است شامل دو تا مضرب سه باشد. در نهایت، این دنباله باید شامل دقیقاً یک مضرب ۵ باشد، و به‌ازای هر عدد اول بزرگتر از ۵ مطمئناً این رشته بیش از یک مضرب از آن‌را شامل نیست.

هر عدد طبیعی مانند n را می‌توان به‌شکل منحصر به فردی به اعداد اول تجزیه کرد

$$n = ۲^r ۳^s ۵^t ۷^q \dots$$

از آنجا که فقط یکی از پنج عدد صحیح در رشتهٔ مورد بحث بر ۵ بخش‌پذیر است، حاصل‌ضرب این اعداد مربع کامل نمی‌شود، مگر اینکه نمای عدد اول ۵، در تجزیهٔ عدد صحیحی که بر آن بخش‌پذیر است، عددی زوج باشد. همین مطلب دربارهٔ هر عدد اول بزرگتر از ۵ نیز درست است. چون تعداد اعضایی از این رشته که بر ۲ و یا ۳ بخش‌پذیرند دست‌کم ۱ است، نمای ۲ و ۳ در هریک از اعضا هم ممکن است زوج باشد هم ممکن است فرد. در نتیجه، اگر بخواهیم حاصل‌ضرب پنج عدد صحیح موجود در این رشته مربع کامل باشد، باید تجزیهٔ هر یک از این اعداد صحیح به عاملهای اول به‌صورت زیر باشد

$$n = ۲^r ۳^s ۵^{۲a} ۷^{۲b} \dots$$

1. Bondesen

که در آن r و s هم ممکن است زوج باشند هم ممکن است فرد، ولی بقیهٔ نماها باید زوج باشد. در نتیجه تنها عددهای صحیحی می‌توانند در این رشته وارد شوند که به یکی از چهار صورت زیر باشند:

الف) r و s زوج باشند؛

$$n = ۲^{۲k}۳^{۲m}۵^{۲a}۷^{۲b}\cdots = (۲^{k}۳^{m}۵^{a}۷^{b}\cdots)^{۲}$$

یعنی n مربعی کامل است.

ب) r فرد و s زوج باشد؛

$$n = ۲^{۲k+۱}۳^{۲m}۵^{۲a}\cdots = ۲(۲^{k}۳^{m}۵^{a}\cdots)^{۲}$$

یعنی n دو برابر مربعی کامل است.

ج) r زوج و s فرد باشد؛

$$n = ۲^{۲k}۳^{۲m+۱}۵^{۲a}\cdots = ۳(۲^{k}۳^{m}۵^{a}\cdots)^{۲}$$

یعنی n سه برابر مربعی کامل است.

د) r و s فرد باشند؛

$$n = ۲^{۲k+۱}۳^{۲m+۱}۵^{۲a}\cdots = ۲ \times ۳(۲^{k}۳^{m}۵^{a}\cdots)^{۲}$$

یعنی n شش برابر مربعی کامل است.

چون فقط چهار نوع عدد در دست داریم، بنابر اصل لانه‌کبوتری دو تا از پنج تا عدد صحیح موجود در این رشته باید از یک نوع باشند. حال مربعهای کامل چنین‌اند

$$۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \cdots,$$

در نتیجه دو برابر مربعی کامل باید یکی از عددهای ۲، ۸، ۱۸، $\cdots$، باشد. ولی تفاضل دو عدد از این نوع دست‌کم برابر با ۶ است و در نتیجه هیچ دو تایی از آنها در رشته‌ای از عددهایی متوالی به‌طول ۵ جا نمی‌گیرند. به همین ترتیب، هیچ‌گاه دو عدد از نوع (ج) یا (د) نمی‌توانند در رشتهٔ ما ظاهر شوند:

سه برابر مربعهای کامل: $۳, ۱۲, ۲۷, ۴۸, \cdots$

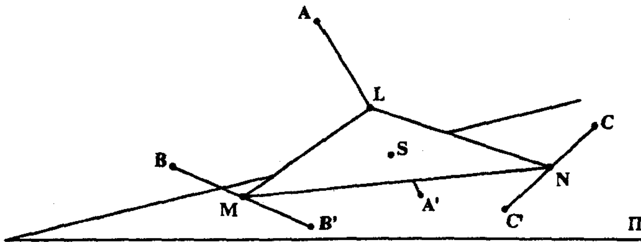
شش برابر مربعهای کامل: $۶, ۲۴, ۵۴, ۹۶, \cdots$

بنابراین، اگر رشته‌ای شامل دو عدد صحیح از یک نوع باشد، آن دو عدد باید از نوع (الف) باشند؛ به عبارت دیگر، هردو باید مربع کامل باشند. ولی تنها رشته‌ای به‌طول پنج که شامل دو مربع کامل است رشتهٔ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ است، و چون حاصل‌ضرب اعضای این رشته ۱۲۰ است، که مربع کامل نیست، در نتیجه هیچ رشته‌ای وجود ندارد که همهٔ شرایط موردنظرمان را داشته باشد.

مسأله‌ای از المپیاد رومانی

فرض کنید A، B و C سه نقطهٔ متمایز باشند که در یک طرف صفحه‌ای مانند π واقع‌اند. نقاط دلخواه A'، B' و C' را روی صفحهٔ π انتخاب می‌کنیم و وسطهای AA'، BB' و CC' را L، M و N و محل برخورد میانه‌های مثلث LMN را S می‌نامیم.

با تغییر مکان نقاط A'، B' و C' در π، نقطهٔ S نیز حرکت می‌کند. در صورتی که نقاط A'، B' و C' همهٔ پیکربندیهای ۳ نقطه‌ای ممکن را در صفحهٔ π بگیرند، مکان‌هندسی S چیست؟ (انطباق دو نقطه از A'، B' و C' یا انطباق هر سه آنها برهم مجاز است.)



شکل۹۱

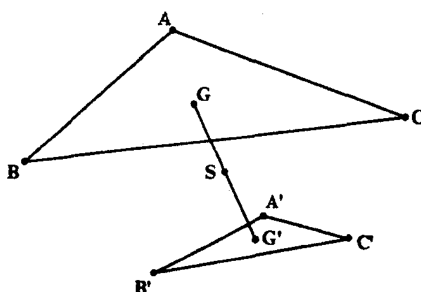
دانیل پدو [۱] این مسأله از رومانی را به‌عنوان مثالی از نوع مسائل هندسیی آورده است که کشورهای اروپای شرقی در اوائل دههٔ ۱۹۶۰ برای مسابقات ریاضی دبیرستانی خود مناسب می‌دانستند. راه‌حل زیر، که به‌نظر وی احتمالاً روشی است که دانش‌آموزان انگلیسی برای حل این مسأله در پیش می‌گیرند، بسیار زیرکانه و زیباست.

راه‌حل

اگر در هریک از نقاط A، B، C و A'، B'، C' ذره‌ای به‌جرم واحد قرار دهیم، سیستم حاصل معادل

است با اینکه در هریک از نقاط L، M و N ذره‌ای به‌جرم ۲ بگذاریم و در نتیجه معادل است با اینکه ذره‌ای به‌جرم ۶ در S بگذاریم.

با وجود این، مرکزثقل، S، را می‌توان به‌روش دیگری نیز مشخص کرد. سه جرم واقع در نقاط A، B و C، با جرمی به‌اندازهٔ ۳ واحد در نقطهٔ G، یعنی محل برخورد میانه‌های $\triangle ABC$ ، معادل‌اند. از آنجا که جرمهای واقع در G و G' مساوی‌اند، مرکزثقل کل سیستم همان وسط GG' است.



شکل۹۲

اینک، همین‌طور که نقاط A'، B' و C' روی π حرکت می‌کنند، نقاط A، B، C و، مهمتر از همه، G ثابت می‌مانند. همچنین به‌سادگی قانع می‌شویم که با تغییر مکان نقاط A'، B' و C'، G' همهٔ وضعیتهای ممکن در π را اختیار می‌کند (در حقیقت، می‌توانیم ابتدا G' را مشخص کنیم و سپس A'، B' و C' را به‌طور مناسب انتخاب کنیم). بنابراین مکان‌هندسی S از وسط همهٔ پاره‌خطهایی مانند GG' تشکیل شده است که در اینجا G' روی صفحهٔ π تغییر می‌کند. در نتیجه مکان‌هندسی موردنظر تصویر صفحهٔ π تحت تجانس به مرکز G و نسبت $\frac{1}{2}$ است. این مکان صفحه‌ای مانند π' است که با صفحهٔ π موازی است و از نقطهٔ G و صفحهٔ π به یک فاصله است.

مرجع

[1] Daniel Pedoe, The Mathematical Tripos and Mathematical Education in Great Britain, *American Mathematical Monthly*, 1964, 666-670.

مسأله‌ای از المپیاد بلغارستان، ۱۹۸۴

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۸۸)
همهٔ جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را به‌دست آورید

$$۵^x \times ۷^y + ۴ = ۳^z$$

راه‌حل
راه‌حل استادانهٔ زیر از جان مورویِ ساکن شهر دالاس در ایالت تگزاس است.
از آنجا که طرف چپ معادله از ۳ بیشتر است، مقدار z دست‌کم باید ۲ باشد. در نتیجه هر دو طرف معادله بر ۳ بخش‌پذیر است و به‌پیمانهٔ ۳،

$$۵^x \times ۷^y + ۴ \equiv (-۱)^x \times ۱^y + ۱ \equiv ۰$$

در نتیجه x باید عددی فرد باشد. پس x صفر نیست. اگر معادله را به‌پیمانهٔ ۵ در نظر بگیریم، می‌توان نوشت

$$۵^x \times ۷^y + ۴ \equiv ۴ \equiv ۳^z$$

اینک، اگر باقیماندهٔ توانهای ۳ را به‌پیمانهٔ ۵ حساب کنیم، دنبالهٔ باقیمانده‌های

$$\{۳, ۴, ۲, ۱, ۳, ۴, ۲, ۱, ۳, \cdots\}$$

به‌دست می‌آید که (۳, ۴, ۲, ۱) در آن تکراری است. برای اینکه (به‌پیمانهٔ ۵) $۳^z \equiv ۴$ ، باید (به‌پیمانهٔ ۴) $z \equiv ۲$ ؛ به‌عبارت دیگر، z باید یکی از اعداد زوج در تصاعد زیر باشد

$$\{۲, ۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸, \cdots\}$$

اگر $z = ۲$، معادله به شکل زیر می‌شود

$$۵^x \times ۷^y + ۴ = ۹$$

و در نتیجه

$$۵^x \times ۷^y = ۵$$

که از آن جواب $(x, y, z) = (۱, ۰, ۲)$ به دست می‌آید.

اگر $z = ۲k > ۲$، آنگاه

$$۵^x \times ۷^y + ۴ = ۳^{۲k}$$

و

$$۵^x \times ۷^y = ۳^{۲k} - ۴ = (۳^k - ۲)(۳^k + ۲), \quad k > ۱$$

از آنجا که عاملهای طرف راست فقط ۴ واحد اختلاف دارند، هردو باهم بر ۵ یا بر ۷ بخش‌پذیر نیستند. همچنین اگر هر دو عدد ۵ و ۷، یکی از عاملها را بشمارند، عامل دیگر باید ۱ باشد، و چون این عامل باید عامل کوچکتر باشد، پس $۳^k - ۱ = ۲$، و در نتیجه $k = ۱$ که تناقض است.

در نتیجه ۵^x باید یکی از عاملها را بشمارد و ۷^y دیگری را. در حقیقت، چون عاملهای دیگری غیر از اینها وجود ندارد، ۵^x باید یکی از این عاملها باشد و ۷^y عامل دیگر. در نتیجه باید توانی از ۵ با توانی از ۷ دقیقاً ۴ واحد اختلاف داشته باشد. ولی به آسانی معلوم می‌شود که هیچ‌گاه این اتفاق رخ نمی‌دهد و در نتیجه جواب دیگری وجود ندارد.

از آنجا که ۵^x با یکی از عاملها برابر است، به‌هر حال،

$$۵^x \geqslant ۳^k - ۲ \geqslant ۳^۲ - ۲ = ۷$$

(به‌خاطر داشته باشید که $k > ۱$). در نتیجه $x \geqslant ۲$. می‌دانیم که هر توانی از ۵، بجز اولی، به رقمهای ۲۵ ختم می‌شود. در نتیجه، توان مناسبی از ۷ باید به رقمهای ۲۹ یا ۲۱ ختم شود. ولی توانهای ۷، به رقمهای ۰۷، ۴۹، ۴۳ و یا ۰۱ ختم می‌شوند.

دو مسأله از اردوش

مدتها پیش پی‌بردم که اثبات مطلبی که از نظر پال اردوش بدیهی است ممکن است از نظر من مستلزم تلاشی خسته‌کننده باشد. حتی برخی از مسائل او که ظاهراً ساده به‌نظر می‌رسند، غالباً به‌طور فریبنده‌ای عمیق و زیرکانه‌اند. به‌هر حال این مسائل همواره جالب توجه‌اند و اغلب مربوط به ویژگیهایی حیرت‌انگیزند. مسألهٔ زیر یکی از مسائل اوست که در سال ۱۹۵۰ در ماهنامهٔ ریاضی امریکا (مسألهٔ ۴۳۳۰، صفحهٔ ۴۹۳) چاپ شده است.

مسألهٔ ۱

ثابت کنید هر دنبالهٔ نامتناهی مانند S از اعداد طبیعی یا

الف) زیردنباله‌ای نامتناهی دارد که در هر جفت از جمله‌های آن هیچ‌کدام دیگری را نمی‌شمارد؛ ویا
ب) زیردنباله‌ای نامتناهی دارد که در هر جفت از جمله‌های آن یکی دیگر را می‌شمارد.

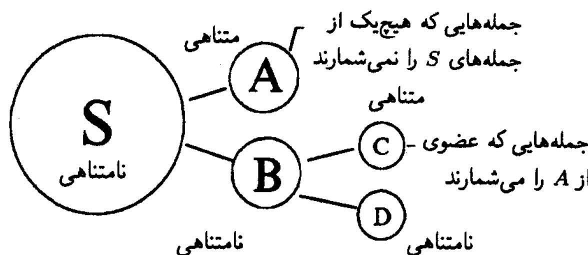
راه‌حل

راه‌حل زیر از ر. س. لیمان (از دانشگاه استنفورد) است.

فرض کنید S را به دو زیرمجموعهٔ A و B افراز کرده‌ایم، به این ترتیب که همهٔ جمله‌هایی را که هیچ‌یک از جمله‌های دیگر S را نمی‌شمارند در A گذاشته‌ایم. اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه (الف) برقرار است و حکم مسأله ثابت می‌شود.

فرض کنید A متناهی باشد. در این حالت مجموعهٔ متمم آن، B، باید نامتناهی باشد (شکل ۹۳ را ببینید). حال، بازهم ممکن است عددهای ناخواسته‌ای در مجموعهٔ B وجود داشته باشند. همهٔ جمله‌های B را که عضوی از A را می‌شمارند، به زیرمجموعه‌ای مانند C منتقل می‌کنیم (چون این جمله‌ها مقسوم‌علیه عضوی دیگرند، واجد شرایط اعضای مجموعهٔ A نیستند و در نتیجه در B

قرار دارند). چون A متناهی است، تعداد مقسوم‌علیه‌های اعضای آن نیز متناهی است، و بنابراین C نیز زیرمجموعه‌ای متناهی خواهد بود که ممکن است تهی باشد. بنابراین زیرمجموعهٔ متمم آن، $D = B - C$، باید نامتناهی باشد



شکل۹۳

اینک که خود را از دست مقسوم‌علیه‌های A آزاد کردیم، عدد صحیحی مانند k در D در نظر بگیرید. چون k در A نیست، باید یکی از جمله‌های S مانند t را بشمارد. جملهٔ t عضوی از A نیست، زیرا در غیر این صورت k، مقسوم‌علیه آن، باید در C باشد و در نتیجه در D نیست. همچنین اگر t در C باشد، باید عضوی از A مانند q را بشمارد و در نتیجه k هم باید q را بشمارد زیرا مقسوم‌علیه t است. در نتیجه بازهم k در C است و در D نیست. بنابراین هر عضو از D مانند k باید عضو دیگری از D مانند t را بشمارد. بنابراین به‌سادگی می‌توانیم دنباله‌ای نامتناهی مانند T بسازیم که در ویژگی (ب) صدق کند، یعنی اینکه در هر جفت از جمله‌های آن یکی دیگری را بشمارد.

عضو دلخواهی از D مانند k_1 انتخاب و فرض کنید k_2 عضوی از D و مضربی از k_1 باشد. به همین ترتیب فرض کنید k_3 عضوی از D و مضربی از k_2 باشد، و این کار را به‌طور نامحدودی ادامه دهید. چون $k_1 \mid k_2$ و $k_2 \mid k_3$، نتیجه می‌گیریم $k_1 \mid k_3$. از آنجا که $k_3 \mid k_4$، پس $k_1 \mid k_4$ ، و الی آخر. به این ترتیب معلوم می‌شود که k_1 هر جملهٔ بعد از خودش در T را می‌شمارد. ولی بدیهی است که از همین استدلال نتیجهٔ مشابهی در مورد هر k_iای در T به‌دست می‌آید. در نتیجه در هر جفت از جمله‌ها مانند (k_i, k_j)، همواره جملهٔ قبلی جملهٔ بعدی را می‌شمارد.

مسألهٔ ۲

(این مسأله مسألهٔ ۱۱۱۸ (با تجدیدنظر) از مجلهٔ کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۱۹۳ است که طراحی و راه‌حل آن از پال اردوش، عضو آکادمی علوم مجارستان، است.)

فرض کنید $\cdots > a_3 > a_2 > a_1$، دنباله‌ای نامتناهی از اعداد طبیعی باشد به‌طوری‌که فاصلهٔ

موجود بین جمله‌های متوالی آن به‌طور نامحدودی بزرگ شود (ممکن است این فاصله‌ها به‌طور یکنوا بزرگ نشوند؛ به‌عبارت دیگر، ممکن است فاصله‌ها قبل از اینکه بزرگ شوند در جایی کوچکتر شوند، ولی نهایتاً از هر کرانی فرا می‌روند). تعیین کنید که چگونه می‌توان دنبالهٔ نامتناهی دیگری مانند

$$b_۱ < b_۲ < b_۳ < \cdots$$

از اعداد طبیعی با این ویژگی ساخت که مجموع اعضای هیچ‌یک از زیرمجموعه‌های متناهی از b_iها برابر با هیچ‌یک از a_iها نباشد.

راه‌حل

می‌خواهیم دنباله‌ای مانند $\{b_i\}$ بیابیم که مجموع عضوهای هریک از زیردنباله‌های متناهی آن بین a_iها قرار داشته باشد و با هیچ a_iای برابر نباشد. برای انتخاب $b_۱$ هر عدد طبیعی که با هیچ‌یک از a_iها برابر نباشد مناسب است (چون $(a_{i+۱} - a_i)$ها به‌تدریج بزرگ می‌شوند، جمله‌های بعد از هر a_i همواره اعدادی صحیح و متوالی نیستند و بنابراین فاصله‌های بزرگ زیادی وجود دارد که می‌توانیم $b_۱$ را از آنها انتخاب کنیم). آنچه می‌خواهیم روشی کلی برای بزرگترکردن دنبالهٔ bهاست به‌طوری‌که شرط اساسی در مورد مجموعها حفظ شود.

فرض کنید توانسته‌ایم دنبالهٔ $b_۱ < b_۲ < \cdots < b_k$ را با موفقیت مشخص کنیم؛ به عبارت دیگر، مجموع اعضای هر یک از زیرمجموعه‌های این دنباله عددی بین a_iها است. مجموع k جملهٔ این دنباله برابر است با

$$S = b_۱ + b_۲ + \cdots + b_k$$

و عدد S هرقدر که بزرگ باشد، $(a_{i+۱} - a_i)$ای وجود دارد که از $S + ۱$ بزرگتر است: به‌ازای nای،

$$a_{n+۱} - a_n > S + ۱$$

و در نتیجه

$$a_{n+۱} > (a_n + ۱) + S > a_n$$

در این صورت ثابت می‌کنیم که با فرض اینکه

$$b_{k+۱} = a_n + ۱$$

می‌توانیم با اطمینان رشتهٔ bها را بزرگتر کنیم.

بدیهی است که این مقدار، $b_{k+۱}$، بین a_n و $a_{n+۱}$ قرار دارد:

$$a_n < a_n + ۱ = b_{k+۱} < b_{k+۱} + S = (a_n + ۱) + S < a_{n+۱}$$

و مجموع اعضای هر زیرمجموعه‌ای از $\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$ را که به b_{k+1} بیفزاییم، مجموع حاصل به a_{n+1} نخواهد رسید، زیرا

$$a_n < b_{k+1} + S < a_{n+1}$$

یعنی

$$a_n < b_{k+1} + b_1 + b_2 + \cdots + b_k < a_{n+1}$$

بنابراین با اضافه کردن b_{k+1} به bها، به این روش، اطمینان داریم که مجموع اعضای هریک از زیرمجموعه‌های جدید bها (که برای تازه بودن باید شامل b_{k+1} باشد) بین a_iها قرار دارد و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

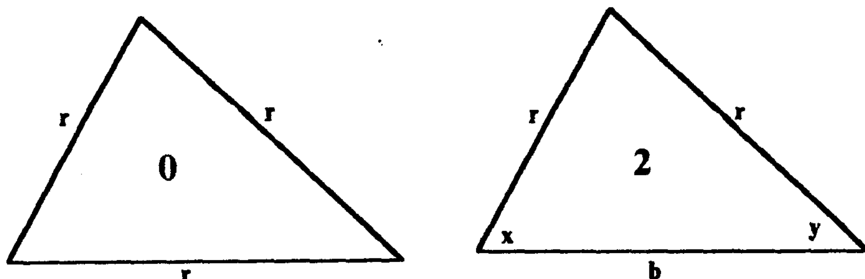
مسأله‌ای از المپیاد بلغارستان، ۱۹۸۵

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۵، ۳۹)

فرض کنید $P_۱$، $P_۲$، ⋯ و $P_۷$ هفت نقطه در فضا باشند به‌طوری‌که هیچ چهار نقطه‌ای از آنها همصفحه نباشند، و فرض کنید هریک از $۲۱ = \binom{۷}{۲}$ پاره‌خط مانند P_iP_j را با یکی از رنگهای قرمز و آبی رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید نحوهٔ رنگ‌آمیزی هرطور که باشد دو مثلث تکرنگ تشکیل می‌شود که هیچ ضلع مشترکی ندارند.

راه‌حل

در اینجا فرصتی طلایی به‌دست آورده‌ایم تا بتوانیم روش استادانه‌ای را ذکر کنیم که در آن از مفهوم «زاویه‌های مخلوط»، یعنی زاویه‌هایی که از هر رنگ ضلعی به همان رنگ دارند، استفاده شده است. بدیهی است که در مثلثهای تکرنگ تعداد زاویه‌های مخلوط برابر با صفر و در بقیهٔ مثلثها این تعداد برابر با ۲ است. از آنجا که در بین نقاط موردنظر هیچ چهار نقطه‌ای همصفحه نیستند، هیچ دو مثلثی زاویه‌ای مشترک ندارند. بنابراین تعداد مثلثهای «مخلوط» برابر با نصف تعداد زاویه‌های مخلوط است. ولی به‌سادگی می‌توانیم کران بالایی برای تعداد زاویه‌های مخلوط بیابیم.



شکل۹۴

از هر نقطه مانند P_i، ۶ پاره‌خط به بقیهٔ P_jها رسم شده است و تنها راههای ممکن برای تقسیم رنگها بین آنها اینهاست:

(۶,۰) (یعنی هر ۶ تا از یک رنگ باشند و هیچ‌کدام از رنگ دوم نباشد)،
(۵,۱)، (۴,۲) و (۳,۳).

از آنجا که در هر نقطه هر پاره‌خط قرمز با هر پاره‌خط آبی زاویه‌ای مخلوط می‌سازد، تعداد زاویه‌های مخلوط در هر نقطه برابر با یکی از عددهای زیر است:

$$۶ \times ۰ = ۰,\ \ ۵ \times ۱ = ۵,\ \ ۴ \times ۲ = ۸,\ \ ۳ \times ۳ = ۹$$

بنابراین در هیچ P_iای بیش از ۹ زاویهٔ مخلوط وجود ندارد، و در نتیجه تعداد کل زاویه‌های مخلوط در تمام پیکربندی از ۶۳ = ۹ × ۷ بیشتر نیست. بنابراین تعداد مثلثهای مخلوط از ۳۱ بیشتر نیست.

از طرفی، این هفت نقطه روی‌هم ۳۵ = $\binom{۷}{۳}$ مثلث می‌سازند و در نتیجه دست‌کم چهارتا از آنها باید تکرنگ باشند (در حالت کلی تعداد مثلثهای تکرنگی که با n نقطه مشخص می‌شوند دست‌کم برابر است با

$$\binom{n}{۳} - \left[\frac{n}{۲}\left[\left(\frac{n-۱}{۲}\right)^{۲}\right]\right]$$

که در آن [ ] نشانهٔ تابع جزءِ صحیح است. برای دیدن برهان این مطلب، مقالهٔ «گرافهای رنگی» نوشتهٔ هارولد دوروارت و دَن فینک‌باینر را درکتاب «گزیده‌های ریاضی»، جلد ۴ از سری کتابهای ریاضی دُلچیانی، MAA، ۱۹۷۹، صفحه‌های ۷ و ۸، ببینید).

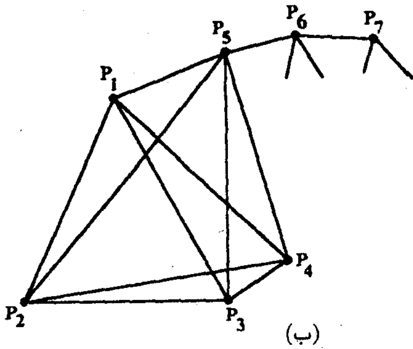
اینک، مجموعه‌ای از چهار مثلث تکرنگ در نظر بگیرید. اگر رنگ دو تا از این مثلثها متفاوت باشد، چون ضلع مشترکی ندارند، حکم مسأله ثابت می‌شود. بنابراین فرض کنید هر چهار مثلث همرنگ، مثلاً قرمز، باشند. بازهم اگر دو مثلث از آنها ضلع مشترکی نداشته باشند، حکم ثابت می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم هر جفت از این مثلثها ضلعی مشترک داشته باشند. در این حالت، این مثلثها فقط به دو روش ممکن است کنار هم قرارگیرند: یا

الف) همهٔ آنها در یک ضلع، مانند P_iP_j، به یکدیگر لولا شده باشند؛ و یا

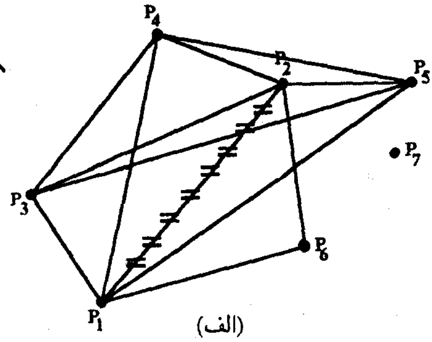
ب) چهار وجه چهاروجهیی مانند $P_iP_jP_kP_l$ باشند.

در هر صورت، ثابت می‌کنیم که بازهم باید دو مثلث تکرنگ در پیکربندی وجود داشته باشند که هیچ ضلع مشترکی ندارند.

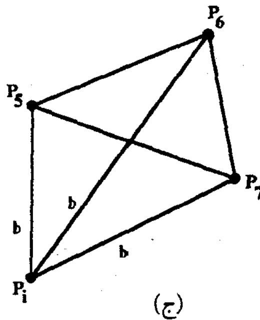
با توجه به شکل ۹۵ (الف)، فوراً معلوم می‌شود که اگر ضلع $P_۱P_۲$ میان هر چهار مثلث مشترک باشد، ضلعی قرمز از $\triangle P_۳P_۴P_۵$ با دو ضلع قرمز با رأس مشترک $P_۱$ مثلثی می‌سازد که تماماً قرمز است، و در غیر این صورت $\triangle P_۳P_۴P_۵$ تماماً آبی است. بنابراین، در هر صورت مثلث تکرنگی وجود دارد که هیچ ضلع مشترکی با $\triangle P_۱P_۲P_۶$ ندارد.



(ب)



(الف)



(ج)

شکل۹۵ (الف ـ ج)

اگر چهار مثلث قرمز وجه‌های چهاروجهی $P_1P_2P_3P_4$ باشند (شکل ۹۵ (ب) را ببینید)، می‌توانیم مانند زیر استدلال کنیم. اگر دو تا از یالهایی که P_5 را به رأسهای چهاروجهی وصل می‌کنند قرمز باشند، مثلث تماماً قرمز دیگری حاصل می‌شود که علی‌رغم اینکه ضلع مشترکی با دو وجه چهارضلعی دارد، با دو وجه دیگر چهارضلعی ضلع مشترکی ندارد. به این ترتیب مطلب موردنظر ثابت می‌شود. همین مطلب در مورد یالهای مجاور به رأسهای P_6 و P_7 نیز درست است، و بنابراین اگر از هریک از نقاط P_5، P_6 و P_7 بیش از یک یال قرمز به چهاروجهی وصل شده باشد حکم ثابت می‌شود.

در نهایت، فرض کنید از هیچ‌کدام از نقاط P_5، P_6 و P_7 بیش از یک ضلع قرمز به چهاروجهی وصل نشده باشد. در این صورت رأسی از چهاروجهی، مانند P_i، باید به هریک از سه رأس P_5، P_6 و P_7 از طریق ضلعی آبی متصل باشد. بنابراین، با توجه به شکل ۹۵ (ج)، معلوم می‌شود که یا مثلث $P_5P_6P_7$ مثلثی تکرنگ و قرمز است و یا مثلثی تکرنگ و آبی در رأس P_i وجود دارد، و به این ترتیب استدلال تمام می‌شود.

مسأله‌ای از مسابقه‌های چین

اگر پال اردوش نتواند مسأله‌ای را در یکی از زمینه‌های تخصصی‌اش حل کند، قریب به یقین این مسأله بسیار دشوار است. متأسفانه اردوش همواره در دسترس نیست تا اینکه دربارهٔ برآورد میزان دشواری مسأله‌ای که به تنهایی قادر به حل آن نیستید به شما کمک کند. هنگامی‌که حل مسأله‌ای فراتر از توان ماست به‌آسانی نمی‌توان میزان دشواری این مسأله را تعیین کرد. به گمانم در این گفتهٔ قدیمی که «هر کاری که از عهده‌اش برآیید، آسان، و در غیر این صورت دشوار است» صداقت موج می‌زند.

من گاه و بی‌گاه و هر بار مدت زمان کوتاهی روی مسألهٔ زیر کار می‌کردم. کم‌کم داشتم نگران می‌شدم که نکند هرگز راه‌حل را پیدا نکنم که بالاخره روزی به‌طور ناگهانی مسأله حل شد. اکنون که این مسأله به‌طور کامل حل شده است نمی‌توانم تصور کنم که به چه دلیل حل کردنش اینقدر طول کشیده است. مطمئناً منصفانه نیست که آن‌را مسأله‌ای دشوار بدانیم، زیرا راه‌حل آن تا حد قابل قبولی طبیعی و سرراست است. این مسأله مربوط به مسابقه‌ای است که در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ در کشور چین برگزار شده است؛ به عقیدهٔ من مخاطبان این مسابقه ردهٔ خاصی از دانش‌آموزان دبیرستانی بوده‌اند.

مسأله

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+۱}] = [\sqrt{۴n+۱}] = [\sqrt{۴n+۲}] = [\sqrt{۴n+۳}]$$

که در آن $[x]$ نشانهٔ بزرگترین عدد صحیحی است که از x کوچکتر یا با آن مساوی است.

راه‌حل

بدیهی است که

$$n = \sqrt{n \times n} < \sqrt{n(n+۱)} < \sqrt{(n+۱)^۲} < n+۱$$

و اگر طرفین نابرابری را دو برابر کنیم،

$$۲n < ۲\sqrt{n(n+۱)} < ۲n + ۲ \qquad (۱)$$

همچنین

$$۲\sqrt{n(n+۱)} = (\sqrt{n} + \sqrt{n+۱})^۲ - (۲n+۱)$$

بنابراین از (۱) نتیجه می‌شود

$$۲n < (\sqrt{n} + \sqrt{n+۱})^۲ - (۲n+۱) < ۲n + ۲$$

با افزودن $۲n + ۱$ به طرفهای نابرابریهای بالا به‌دست می‌آوریم

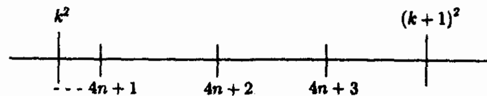
$$۴n + ۱ < (\sqrt{n} + \sqrt{n+۱})^۲ < ۴n + ۳$$

و در نتیجه

$$\sqrt{۴n+۱} < \sqrt{n} + \sqrt{n+۱} < \sqrt{۴n+۳} \qquad (۲)$$

حال، $۴n + ۱$ یا خودش مربع کامل است و یا بین جفتی مربع کامل متوالی قرار دارد؛ به‌عبارت دیگر، به‌ازای عدد صحیحی مانند k،

$$k^۲ \leqslant ۴n + ۱ < (k+۱)^۲$$



اینک بیایید روی عددهای صحیح از $k^۲$ به طرف $(k+۱)^۲$ برویم. پیش از اینکه به $(k+۱)^۲$ برسیم، باید از $۴n + ۱$ بگذریم (البته به شرط اینکه از خود $۴n + ۱$ حرکت را شروع نکرده باشیم) و بلافاصله پس از آن، به عددهای $۴n + ۲$ و $۴n + ۳$ می‌رسیم. ولی هنوز نتوانسته‌ایم به مقصد، یعنی $(k+۱)^۲$، برسیم زیرا هیچ مربع کاملی به‌پیمانهٔ ۴ همنهشت ۲ یا ۳ نیست. به عبارت دیگر همهٔ این اعداد باید بین $k^۲$ و $(k+۱)^۲$ باشند:

$$k^۲ \leqslant ۴n + ۱ < ۴n + ۲ < ۴n + ۳ < (k+۱)^۲$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$k \leqslant \sqrt{۴n+۱} < \sqrt{۴n+۲} < \sqrt{۴n+۳} < k + ۱$$

از آنجا که (بنابر (۲)) $\sqrt{n} + \sqrt{n+۱}$ بین $\sqrt{۴n+۱}$ و $\sqrt{۴n+۳}$ قرار دارد، پس هر چهار عدد $\sqrt{۴n+۱}$، $\sqrt{۴n+۲}$، $\sqrt{۴n+۳}$ و $\sqrt{n} + \sqrt{n+۱}$ در بازهٔ نیم‌بستهٔ $[k, k+۱)$ قرار دارند، و در نتیجه جزءِ صحیح همهٔ آنها برابر با k است.

مسأله‌ای هندسی از معابد ژاپنی

به‌دلیل سیاست انزواطلبانهٔ ژاپن و عدم امکان ارتباط ریاضیدانان آنها با ریاضیدانان غربی، ریاضیات ژاپنی در بخش عمده‌ای از دوران اِدو (۱۶۰۳ تا ۱۸۶۷) کاملاً خودساخته بوده است. به همین دلیل، مردم هر طبقه‌ای از جامعه، از کشاورز گرفته تا سامورایی، به هندسهٔ ترکیبی علاقه‌مند بوده و به اکتشافات جالب توجهی دست یافته‌اند. بنابر رسومات آن‌زمان، این اکتشافات گرانبها را روی لوحه‌هایی چوبی حک می‌کردند و آنها را در اطراف زیارتگاهها و معابد خود می‌آویختند. متأسفانه ژاپن سرزمین زمین‌لرزه‌ها و طوفانهای توأم با رعد و برق است و طی سالیان، بسیاری از این گنجینه‌ها بر اثر آتش‌سوزی از میان رفته‌اند. با وجود این، بقایای زیادی از این آثار به جا مانده است و گزیده‌ای متشکل از ۲۵۰ مسألهٔ حیرت‌انگیز از این مجموعه را هیده‌توسی فوکاگاوا با همکاری هندسه‌دان بزرگ امریکایی، دَن پدو، درکتابی به زبان انگلیسی جمع‌آوری کرده است. مسألهٔ زیر یکی از مسائل این کتاب است، ولی راه‌حلی که در اینجا آورده‌ایم مربوط به ارائه‌دهندگان آن در مجلهٔ کروکس ماتماتیکوروم است و با راه‌حلی که در خود کتاب آمده متفاوت است.

مسألهٔ ۱۱۲۱

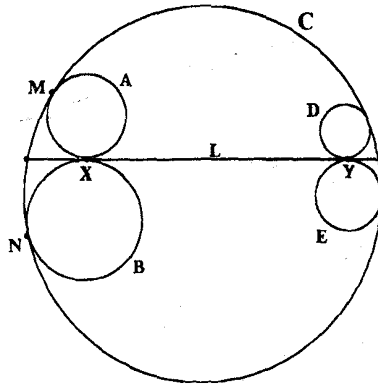
(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۱۹۴)

X نقطه‌ای روی وتر L از دایرهٔ مفروض C است و دایره‌های A و B در دو طرف مخالف L طوری رسم شده‌اند که بر دایرهٔ C و نیز بر وتر L در نقطهٔ X مماس‌اند (شکل ۹۶ را ببینید). ثابت کنید محل نقطهٔ X هر جایی که روی L باشد، نسبت اندازه‌های A و B همواره مقدار ثابتی است؛ به عبارت دیگر

$$\frac{\text{شعاع } A}{\text{شعاع } B} = \frac{a}{b} = \text{مقداری ثابت} \quad (= \frac{\text{شعاع } D}{\text{شعاع } E} \text{ در هر نقطهٔ دیگری مانند } Y\text{،})$$

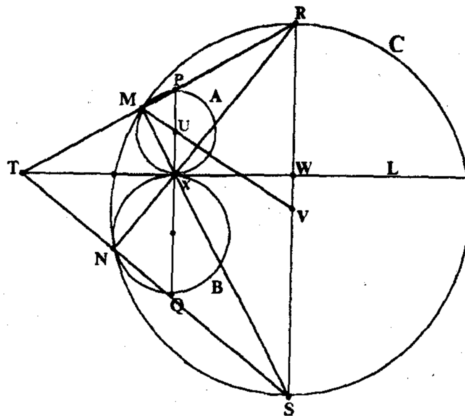
راه‌حل

راه‌حل استادانهٔ زیر را دَن سوکولوفسکی (از شهر ویلیامزبورگ در ایالت ویرجینیا) است.



شکل۹۶

او ابتدا عمود PXQ را در نقطهٔ X بر وتر L رسم می‌کند (شکل ۹۷ را ببینید). از آنجا که L مماس مشترک A و B است، عمودهای PX و XQ قطرهایی از دایره‌اند و اگر M و N نقاط تماس باشند، $\angle PMX$ قائمه است. در نتیجه با امتداد دادن پاره‌خطهای MP و MX قطر RS از دایرهٔ C مشخص می‌شود.



شکل۹۷

حال U و V، مرکز دایره‌های A و C، در امتداد نقطهٔ تماس آنها، M، قرار دارد و بدیهی است که مثلثهای MUX و MVS متساوی‌الساقین‌اند. از آنجا که این مثلثها زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ مشترکی در M دارند، زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ آنها در X و S نیز برابرند، و در نتیجه خطهای PXQ و RS موازی‌اند. بنابراین RS بر L عمود است.

به همین ترتیب، با امتداد دادن پاره‌خطهای NX و NQ قطری از C مشخص می‌شود که بر L عمود است، و در نتیجه NX و NQ نیز به‌ترتیب از نقاط R و S می‌گذرند.

اینک RM و SN را امتداد دهید تا یکدیگر را در نقطهٔ T قطع کنند و مثلث TRS کامل شود. تا این مرحله، معلوم نیست که نقطهٔ T بر خط L واقع است یا خیر. بدیهی است که در این مثلث RN و SM ارتفاع‌اند؛ پس، X مرکز ارتفاعی آن است و در نتیجه TX سومین ارتفاع مثلث است (که بر RS عمود است). ولی L بر RS عمود است و از X می‌گذرد؛ در نتیجه، T واقعاً روی L قرار دارد.

در نتیجه در $\triangle TRS$، PQ با RS موازی است (شکل ۹۸ را ببینید) و به این ترتیب دو جفت از مثلثهای متشابه به‌دست می‌آید:

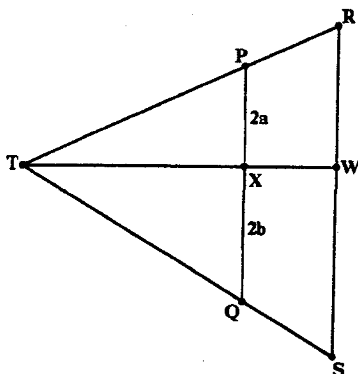
$$(TXP, TWR), \quad (TXQ, TWS)$$

با توجه به اینکه PX و QX قطر دایره‌های A و B هستند، پس

$$\frac{۲a}{RW} = \frac{TX}{TW} = \frac{۲b}{WS}$$

و در نتیجه

$$\frac{a}{b} = \frac{۲a}{۲b} = \frac{RW}{WS}$$



شکل۹۸

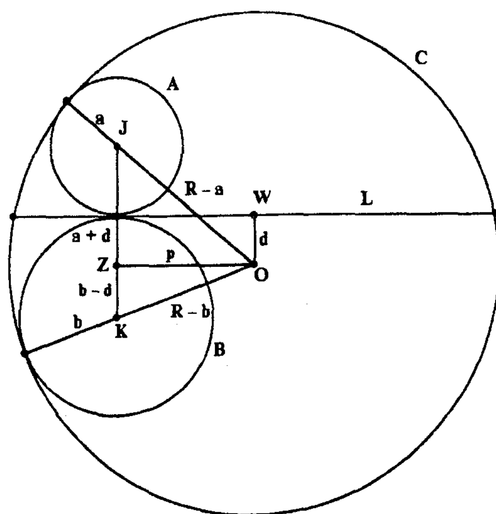
ولی $\frac{RW}{SW}$ خارج‌قسمت طول بخشهایی است که L روی قطری از C که بر آن عمود است جدا کرده است و کاملاً از محل نقطهٔ X روی L مستقل است. به این ترتیب حکم مسأله ثابت می‌شود.

در راه‌حل دوم که از سام باتج (از شهر سن آنتونیو در ایالت تگزاس) است، به‌نظر می‌رسد که مسأله، پیش از اینکه حل کردن آن‌را به درستی آغاز کرده باشیم، به شکلی معجزه‌آمیز حل می‌شود. حقیقتاً هر قفلی با کلید درست چه آسان باز می‌شود.

فرض کنید مرکز دایره‌های A، B و C به‌ترتیب J، K و O و شعاع آنها به‌ترتیب a، b و c باشد. همچنین فرض کنید OW، $OW = d$، OZ و $OZ = p$، عمودهایی باشند که از O بر خط L و خط‌المرکزین JK رسم شده‌اند (شکل ۹۹ را ببینید). در این صورت بدیهی است که

$$JZ = a + d, \qquad KZ = b - d$$

$$JO = R - a, \qquad KO = R - b$$



شکل۹۹

اینک، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلثهای JOZ و KOZ، مسأله را حل می‌کنیم. می‌توان نوشت

$$p^{2} + (a + d)^{2} = (R - a)^{2} \tag{1}$$

و

$$p^{2} + (b - d)^{2} = (R - b)^{2} \tag{2}$$

پس از ساده کردن (۱) به‌دست می‌آوریم

$$p^{2} + a^{2} + 2ad + d^{2} = R^{2} - 2aR + a^{2}$$

و در نتیجه

$$a = \frac{R^{2} - p^{2} - d^{2}}{2(d + R)}$$

به همین ترتیب از (۲) نتیجه می‌شود

$$p^۲ + b^۲ - ۲bd + d^۲ = R^۲ - ۲bR + b^۲$$

و در نتیجه

$$b = \frac{R^۲ - p^۲ - d^۲}{۲(R-d)}$$

بنابراین

$$\frac{a}{b} = \frac{R-d}{R+d}$$

یعنی $\frac{a}{b}$ مقدار ثابتی است.

دو مسأله از دومین المپیاد بالکان، ۱۹۸۵

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۷۱-۷۲)

مسألهٔ ۱

بیگانگی افراد با زبانهای یکدیگر همواره یکی از مشکلات کنفرانسهای بین‌المللی است. از ۱۹۸۵ شرکت‌کننده‌ای که در یکی از کنفرانسهای اخیر حضور داشتند، هیچ‌یک بیش از ۵ زبان نمی‌دانست و در هر جمع سه نفری از آنها، دست‌کم دو نفر به زبانی مشترک صحبت می‌کردند. ثابت کنید دست‌کم ۲۰۰ نفر از شرکت‌کنندگان می‌توانستند به یک زبان مشترک صحبت کنند.

راه‌حل

(راه‌حل مشابهی در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۹۱، ۲۲۸ آمده است.)

شاید نخستین چیزی که به ذهن می‌رسد اصل لانه‌کبوتری و نیز این باشد که در صورتی که هیچ‌یک از زبانها را بیش از ۱۹۹ نفر از شرکت‌کنندگان به‌کار نبرند، عددهایی که در مسأله بیان شده‌اند نادرست خواهند بود. در نتیجه، براساس این فرضیه، می‌کوشیم به تناقضی دست یابیم.

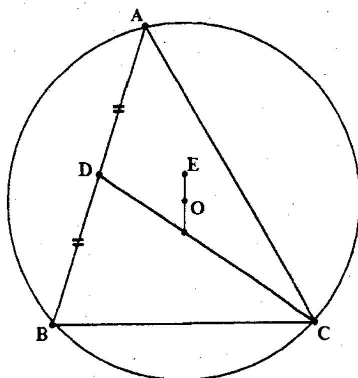
اگر دو نفر از حاضرین مانند A و B زبانی مشترک نداشته باشند، آنگاه در هر سه‌تایی مانند (A, B, C) که در آن شرکت دارند، C باید با یکی از دو نفر A و B (یا هردو آنها)، زبانی مشترک داشته باشد. اینک بنابر فرض تعداد افرادی که بتوانند به زبان خاصی صحبت کنند که A یا B آن‌را می‌دانند بیش از ۱۹۸ نفر نیست، و چون A و B روی‌هم بیش از ۱۰ زبان مختلف را نمی‌دانند، پس نمی‌توانیم بیش از $۱۹۸۰ = ۱۹۸ \times ۱۰$ نفر را به‌عنوان C انتخاب کنیم تا اینکه سه‌تایی قابل قبولی مانند (A, B, C) کامل شود. این تعداد از $۱۹۸۳ = ۲ - ۱۹۸۵$، یعنی تعداد کسانی که بنابر فرض مسأله می‌توانند این نقش را ایفا کنند، کمتر است، و به این ترتیب به تناقض رسیده‌ایم.

به‌آسانی می‌توان از بررسی حالت دیگر صرفنظر کرد، زیرا احتمال اینکه دو نفر از میان ۱۹۸۵ شرکت‌کننده هیچ زبان مشترکی نداشته باشند بسیار زیاد است. با وجود این، بازهم لازم است این احتمال را در نظر بگیریم که هر جفتی مانند (A, B) زبانی مشترک داشته باشند. خوشبختانه اثبات حکم در این حالت چیز پیش‌پا افتاده‌ای است، زیرا در این صورت بجز A، ۱۹۸۴ شرکت‌کنندهٔ دیگر باید بتوانند یکی از پنج زبان یا کمتر از آن‌را که A می‌تواند به آنها صحبت کند به‌کار ببرند، که (با در نظر گرفتن A) میانگین کسانی که یکی از این زبانها را می‌دانند ۳۹۷ می‌شود.

مسألهٔ ۲

(دو راه‌حل دیگر در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۹۱، ۱۰۵ و ۲۲۸ آمده است.)

نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، CD میانهٔ وارد بر AB و E محل برخورد میانه‌های مثلث ACD است. ثابت کنید OE بر CD عمود است اگر و تنها اگر $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین باشد به‌طوری‌که $AB = AC$.



شکل ۱۰۰

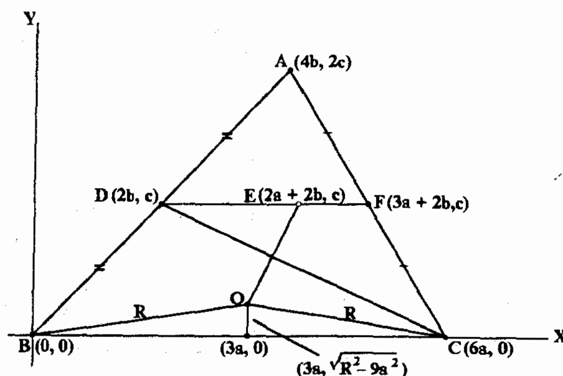
از آنجا که علاقهٔ زیادی به هندسهٔ اقلیدسی دارم، همواره نخستین کوششم برای حل هر مسأله‌ای که به زبان اقلیدسی بیان شده است استفاده از روشهای ترکیبی است. پس از اینکه بخش عمده‌ای از بعدازظهر را صرف اندیشیدن روی این مسأله کردم، دست آخر تصمیم گرفتم که روش تحلیلی را نیز آزمایش کنم، زیرا همان‌طور که می‌دانیم می‌توان خطهای عمود برهم را به‌آسانی با استفاده از شیبهای عکس و قرینه به‌طور تحلیلی مشخص کرد. ده دقیقهٔ بعد مسأله به‌طور کامل حل شد و بار دیگر از هندسهٔ تحلیلی شکست خوردم.

بعدها که بازهم به این مسأله فکر کردم، دریافتم که این مسأله با روشهای برداری نیز قابل‌حل

است، و به این راه‌حل برداری، که تقریباً همان پیچیدگیهای راه‌حل تحلیل را داراست، به‌سرعت دست یافتم. چون به‌نظر می‌رسد که بردارها ویژگیهای اصلی پیکربندی را، اغلب با اضافه کردن یک یا دو چندضلعی، به‌آسانی نشان می‌دهند، امیدوارم که از هر دو راه‌حل زیر لذت ببرید.

روش تحلیلی

فرض کنید مختصات دکارتی رأسها $B(۰,۰)$، $C(۶a,۰)$ و $A(۴a,۲c)$ باشند. در این صورت مختصات وسط AB، $(۲b,c)$ است.



شکل ۱۰۱

چون E نقطهٔ برخورد میانه‌های $\triangle ADE$ است، DE میانه است و در نتیجه ضلع مقابل یعنی AC را در وسط آن، $F(۳a+۲b,c)$، قطع می‌کند.

از آنجا که نقطهٔ برخورد میانه‌ها هر یک از آنها را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، مختصات E، $(۲b+۲a,c)$ است.

چون O روی عمودمنصف BC قرار دارد، به‌آسانی معلوم می‌شود که مختصات آن $(۳a,\sqrt{R^۲-۹a^۲})$ است که در آن R، $R=BO$، شعاع دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ است.

بنابراین

$$CD \text{ شیب } = \frac{-c}{۶a-۲b}$$

$$OE \text{ شیب } = \frac{\sqrt{R^۲-۹a^۲}-c}{a-۲b}$$

و CD و OE برهم عمودند اگر و تنها اگر

$$\frac{-c}{۶a-۲b}\times\frac{\sqrt{R^۲-۹a^۲}-c}{a-۲b}=-۱$$

$$c\left[\sqrt{R^2-9a^2}-c\right]=(6a-2b)(a-2b)$$

$$c\sqrt{R^2-9a^2}-c^2=6a^2-14ab+4b^2$$

$$c\sqrt{R^2-9a^2}=c^2+6a^2-14ab+4b^2$$

اینک، می‌توان از برابری $AO=R$ عبارت دیگری برای $c\sqrt{R^2-9a^2}$ به‌دست آورد:

$$AO^2=(3a-4b)^2+(\sqrt{R^2-9a^2}-2c)^2=R^2$$

$$(3a-4b)^2+R^2-9a^2-4c\sqrt{R^2-9a^2}+4c^2=R^2$$

$$9a^2-24ab+16b^2-9a^2+4c^2=4c\sqrt{R^2-9a^2}$$

و بالاخره

$$-6ab+4b^2+c^2=c\sqrt{R^2-9a^2}$$

بنابراین CD و OE برهم عمودند اگر و تنها اگر

$$-6ab+4b^2+c^2=c^2+6a^2-14ab+4b^2$$

$$8ab=6a^2$$

$$4b=3a$$

این نتیجه معادل با این است که $A(4b,2c)$ همان نقطهٔ $A(3a,2c)$ واقع بر عمودمنصف BC باشد، یعنی اگر و تنها اگر $AB=AC$.

راه‌حل برداری

بازهم لازم است به چند پیشنیاز ساده توجه کنیم:

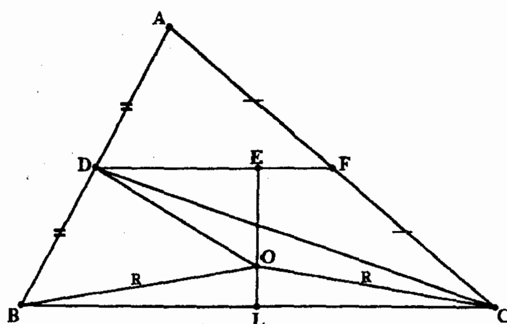
الف) E میانهٔ DF از $\triangle ADC$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، و در نتیجه $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$.

ب) چون D و F وسطهای AB و AC هستند، $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و در نتیجه

$$\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

ج) از آنجا که O روی عمودمنصفهای AB و BC قرار دارد، با استفاده از نمادهای معمولی، $BC=a$، $AC=b$ و $AB=c$،

$$R\cos\angle ABO=BD=\frac{1}{2}c,\quad R\cos\angle OBC=BL=\frac{1}{2}a,\cdots \qquad (*)$$



شکل۱۰۲

اینک بدیهی است که

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$$

و در نتیجه

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BO}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BO}$$

همچنین

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$$

و در نتیجه

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

با توجه به برابری $\vec{u} \cdot \vec{v} = |u||v|\cos\theta$، که در آن θ زاویهٔ بین $\vec{u}$ و $\vec{v}$ است، حاصل‌ضرب داخلی $\overrightarrow{OE}$ و $\overrightarrow{DC}$ برابر است با

$$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{DC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BO}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$- \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{1}{2}ca\cos B - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{6}ac\cos B$$

$$- Ra\cos\angle OBC + \frac{1}{2}Rc\cos\angle ABO$$

$$= \frac{1}{3}ca\cos B - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}c^2 \quad \text{(بنابر (*) در بالا)}$$

$$= \frac{1}{3}ca\cos B - \frac{1}{6}a^2$$

در نهایت، بنابر قانون کسینوسها، $ca\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}$ و در نتیجه

$$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{DC} = \frac{a^2+c^2-b^2}{6} - \frac{1}{6}a^2$$

$$= \frac{1}{6}(c^2-b^2)$$

و سمت راست این برابری به‌وضوح وقتی و فقط وقتی صفر می‌شود، و تعامد موردنظر مسأله از آن نتیجه می‌شود، که $c = b$، یا معادل آن، $AB = AC$.

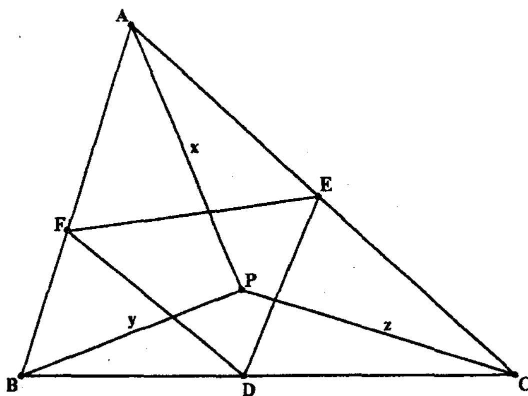
از ویژگیهای مثلثهای پایی

(مسألهٔ ۱۰۷۶، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۶۲)

مثلث DEF که از پای عمودهای وارد بر سه ضلع مثلث ABC، از نقطه‌ای مانند P درون مثلث، پدید می‌آید، مثلث پایی P نسبت به مثلث ABC نامیده می‌شود. در این مسأله از ما خواسته‌اند دستور جالبی را ثابت کنیم که مساحت مثلث را به مساحت مثلث پایی آن مربوط می‌کند.

اگر x، y و z به‌ترتیب فاصله‌های نقطهٔ P تا سه رأس A، B و C باشند، ثابت کنید نقطهٔ P، هر جا که درون $\triangle ABC$ انتخاب شود،

$$x^۲ \sin ۲A + y^۲ \sin ۲B + z^۲ \sin ۲C + ۸(\triangle DEF \text{ مساحت}) = ۴(\triangle ABC \text{ مساحت})$$



شکل۱۰۳

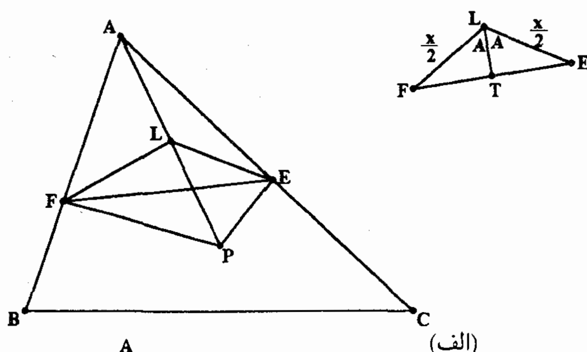
این دستور را طراح و حل‌کنندهٔ خلاق مسائل ریاضی، ماری کلامکین (استاد بازنشستهٔ دانشگاه آلبرتا) یافته است و راه‌حل زیبای زیر از هندسه‌دان برجستهٔ یونانی، جورج تسینتسیفاس (ساکن شهر تسالونیکی) است.

راه‌حل

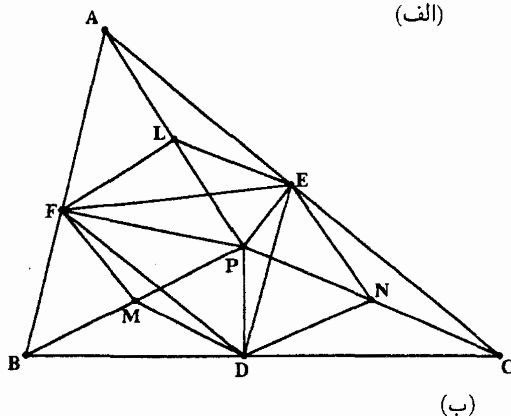
چون PE و PF بر ضلعهای مثلث عمودند، چهارضلعی $AFPE$ محاطی است و در حقیقت AP قطر دایرهٔ محاطی این چهارضلعی است که مرکزش وسط AP، L، و شعاعش $\frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}x$ است (شکل ۱۰۴ (الف) را ببینید). از آنجا که هریک از شعاعهای LF و LE برابر با $\frac{1}{2}x$، و زاویهٔ مقابل به وتر EF در رأس L، دو برابر زاویهٔ مقابل به این وتر در رأس A است، نتیجه می‌گیریم که $\angle FLE = 2A$.

چون $\triangle FLE$ متساوی‌الساقین است، ارتفاع LT زاویهٔ رأس L و نیز قاعدهٔ FE را نصف می‌کند و (شکل کوچکی را که در شکل ۱۰۴ (الف) آمده است ببینید)

$$\angle FLT = A, \quad FT = \frac{1}{2}FE$$



(الف)



(ب)

شکل۱۰۴ (الف و ب)

ولی در $\triangle FLT$، $FT = \frac{x}{2}\sin A$. بنابراین

$$FT = \frac{1}{2}FE = \frac{1}{2}x\sin A$$

و در نتیجه

$$EF = x\sin A$$

همچنین $LT = \frac{x}{۲}\cos A$ و در نتیجه

$$x\cos A = ۲LT$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} x^۲ \sin ۲A &= x^۲(۲\sin A\cos A) \\ &= ۲(x\sin A)(x\cos A) \\ &= ۲EF \times ۲LT \\ &= ۸\left(\tfrac{۱}{۲}EF \times LT\right) \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$x^۲ \sin ۲A = ۸(\text{مساحت } \triangle FLE)$$

به همین ترتیب، با توجه به شکل ۱۰۴ (ب)،

$$y^۲ \sin ۲B = ۸(\text{مساحت } \triangle FMD)$$

و

$$z^۲ \sin ۲C = ۸(\text{مساحت } \triangle DNE)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &x^۲ \sin ۲A + y^۲ \sin ۲B + z^۲ \sin ۲C \\ &\quad = ۸(\text{مساحت } \triangle FLE + \text{مساحت } \triangle FMD + \text{مساحت } \triangle DNE) \end{aligned}$$

اگر به دو طرف برابری بالا ۸ برابر مساحت مثلث DEF را اضافه کنیم، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} &x^۲ \sin ۲A + y^۲ \sin ۲B + z^۲ \sin ۲C + ۸(\text{مساحت } \triangle DEF) \\ &\quad = ۸(\text{مساحت شش‌ضلعی } FLENDM) \end{aligned}$$

در آخر، چون L، M و N وسطهای AP، BP و CP هستند، به‌آسانی معلوم می‌شود که در $\triangle ABC$ مساحت ناحیهٔ بیرونی شش‌ضلعی $FLENDM$ برابر با مساحت ناحیهٔ درونی آن است:

میانهٔ FL مثلث APF را نصف می‌کند و همین‌طور میانه‌های LE، EN، ND، DM و MF.

بنابراین

$$\text{مساحت } \triangle ABC = ۲(\text{مساحت } FLENDM)$$

و در نتیجه

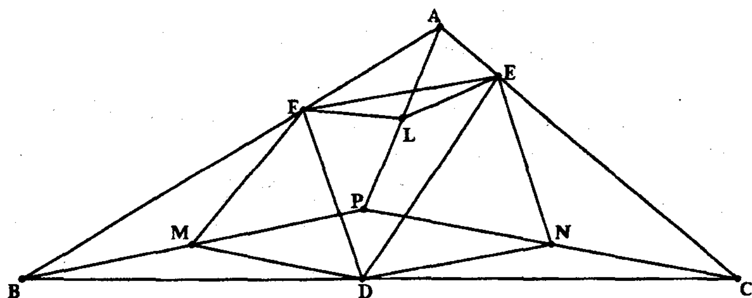
$$۴(\text{مساحت } \triangle ABC) = ۸(\text{مساحت } FLENDM)$$

که از آن نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

توجه کنید که اگر $\triangle ABC$، مثلاً در رأس A، منفرجه باشد، $\sin 2A$ منفی می‌شود و در نتیجه علامت $\sin 2A$ x^2(= (مساحت $\triangle FLE$)۸) نیز منفی می‌شود، و مجبوریم مساحت $\triangle FLE$ را منفی در نظر بگیریم. ولی در حالتی که زاویهٔ A منفرجه است، از شکل ۱۰۵ معلوم می‌شود که برای به‌دست آوردن مساحت شش‌ضلعی $FLENDM$، باید مساحت $\triangle FLE$ را از مساحت مثلث پایی کم کنیم تا بتوانیم مقدار درستی را به مساحت مثلثهای MFD و DNE اضافه کنیم:

$$\text{مساحت } FLENDM = \text{مساحت } \triangle MFD + \text{مساحت } \triangle DNE$$
$$+ (\text{مساحت } \triangle DEF - \text{مساحت } \triangle FLE)$$

بنابراین در مورد مثلثهای منفرجه با در نظر گرفتن مساحت منفی استدلال بالا معتبر باقی می‌ماند، و نتیجه می‌گیریم که دستور موردنظر در مورد تمام مثلثها درست است.



شکل۱۰۵

سه راه‌حل دیگر از جورج اواگلوپولس

سه مسألهٔ این بخش تا اندازه‌ای تکنیکی و نسبت به مسائل دیگر این کتاب دشوارترند، و نیاز به تمرکز حواس بیشتری دارند. با وجود این، این مسائل بسیار جالب‌اند و آوردن راه‌حلهای هوشمندانه جورج خود پاداش درخوری به سخت‌کوشی خواننده است.

مسألهٔ ۱

این مسأله نابرابریی دشوار است که از طرف روسیه مطرح شده است. ([۱۹۸۵,۷۳]، [۱۹۸۷, ۴۹۱]).

فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$ و x_n، n عدد حقیقی و مثبت و کوچکتر از ۱ یا مساوی با آن باشند که لزوماً متمایز نیستند و از نظر اندازه به‌طور نانزولی مرتب شده‌اند:

$$۱ \geqslant x_۱ \geqslant x_۲ \geqslant \cdots \geqslant x_n > ۰$$

در این صورت، اگر a مقداری در $[۰ , ۱]$ باشد، نابرابری به‌ظاهر دشوار زیر را ثابت کنید:

$$(۱ + x_۱ + \cdots + x_n)^a \leqslant ۱ + x_۱^a + \frac{۱}{۲}(۲x_۲)^a + \frac{۱}{۳}(۳x_۳)^a + \cdots + \frac{۱}{n}(nx_n)^a$$

راه‌حل

تعجب‌آور نیست که مسائلی از این قبیل، غالباً به استقرا قابل حل باشند. با وجود این، جمع‌وجور کردن جزئیات ممکن است کار بسیار دشواری باشد.

به‌سادگی معلوم می‌شود که این نابرابری در مورد تک عددی مانند $x_۱$ برقرار است. چون $x_۱ > ۰$، پس $۱ + x_۱ > ۱$، و چون $۱ \geqslant a \geqslant ۰$، توان aام $۱ + x_۱$، از $۱ + x_۱$ کمتر است:

$$(۱ + x_۱)^a \leqslant ۱ + x_۱$$

از طرف دیگر چون $۱ \geqslant x_۱$ و $۱ \geqslant a \geqslant ۰$، پس $x_۱^a$ از $x_۱$ بزرگتر است و بنابراین

$$(۱ + x_۱)^a \leqslant ۱ + x_۱ \leqslant ۱ + x_۱^a$$

پس نابرابری موردنظر درست است.

اینک فرض کنید نابرابری موردنظر در مورد عددی طبیعی مانند k درست باشد، یعنی

$$(۱ + x_۱ + \cdots + x_k)^a \leqslant ۱ + x_۱^a + \frac{۱}{۲}(۲x_۲)^a + \cdots + \frac{۱}{k}(kx_k)^a$$

و نیز فرض کنید $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_{k+۱}\}$ مجموعهٔ مناسبی از $k + ۱$ عدد باشد.

اگر بتوانیم ثابت کنیم

$$(۱ + x_۱ + \cdots + x_{k+۱})^a - (۱ + x_۱ + \cdots + x_k)^a \leqslant \frac{۱}{k+۱}[(k+۱)x_{k+۱}]^a \qquad (۱)$$

نابرابری موردنظر به استقرا ثابت می‌شود، زیرا در این صورت

$$(۱ + x_۱ + \cdots + x_{k+۱})^a \leqslant (۱ + x_۱ + \cdots + x_k)^a + \frac{۱}{k+۱}[(k+۱)x_{k+۱}]^a$$
$$\leqslant ۱ + x_۱ + \frac{۱}{۲}(۲x_۲)^a + \cdots + \frac{۱}{k}(kx_k)^a + \frac{۱}{k+۱}[(k+۱)x_{k+۱}]^a$$

برای اثبات (۱)، جورج طرف چپ آن‌را در نظر می‌گیرد و از جملهٔ دوم فاکتورگیری می‌کند تا حاصل شود

$$(۱ + x_۱ + \cdots + x_k)^a \left[\left(۱ + \frac{x_{k+۱}}{۱ + x_۱ + \cdots + x_k}\right)^a - ۱\right]$$

چون $۱ \leqslant a \leqslant ۰$، پس $\left(۱ + \frac{x_{k+۱}}{۱ + x_۱ + \cdots + x_k}\right)^a$ کوچکتر از $\left(۱ + \frac{x_{k+۱}}{۱ + x_۱ + \cdots + x_k}\right)^۱$ یا با آن مساوی است، و در نتیجه

$$(۱ + x_۱ + \cdots + x_{k+۱})^a - (۱ + x_۱ + \cdots + x_k)^a$$
$$= (۱ + x_۱ + \cdots + x_k)^a \left[\left(۱ + \frac{x_{k+۱}}{۱ + x_۱ + \cdots + x_k}\right)^a - ۱\right]$$
$$\leqslant (۱ + x_۱ + \cdots + x_k)^a \left[\left(۱ + \frac{x_{k+۱}}{۱ + x_۱ + \cdots + x_k}\right)^۱ - ۱\right]$$
$$= (۱ + x_۱ + \cdots + x_k)^{a-۱} x_{k+۱} \qquad (۲)$$

حال، چون ترتیب x_iها نانزولی است، پس

$$۱ + x_۱ + \cdots + x_k \geqslant x_{k+۱} + x_{k+۱} + \cdots + x_{k+۱} \quad (k+۱ \text{ بار})$$
$$= (k+۱)x_{k+۱}$$

چون $۱ + x_۱ + \cdots + x_k$ بزرگتر از ۱ است و نیز $a - ۱ \leqslant ۰$، نتیجه می‌شود

$$(۱ + x_۱ + \cdots + x_k)^{۱-a} \geqslant [(k+۱)x_{k+۱}]^{۱-a}$$

اگر نماها را در ۱− ضرب کنیم باید پایه‌ها را هم معکوس کنیم، بنابراین

$$(۱ + x_۱ + \cdots + x_k)^{a-۱} \leqslant [(k+۱)x_{k+۱}]^{a-۱}$$

که اگر آن‌را در x_{k+1} ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$(1 + x_1 + \cdots + x_k)^{a-1} x_{k+1} \leqslant [(k+1)x_{k+1}]^{a-1} x_{k+1}$$
$$= \frac{1}{k+1}[(k+1)x_{k+1}]^a \qquad (۳)$$

در نهایت، با ادغام (۲) و (۳)،

$$(1 + x_1 + \cdots + x_{k+1})^a - (1 - x_1 + \cdots + x_k)^a$$
$$\leqslant (1 + x_1 + \cdots + x_k)^{a-1} x_{k+1} \qquad \text{(بنابر (۲))}$$
$$\leqslant \frac{1}{k+1}[(k+1)x_{k+1}]^a$$

مسألهٔ ۲

اینک به مسأله‌ای از دور آخر المپیاد ۱۹۸۵ بلغارستان می‌پردازیم [۱۹۸۸، ۲۳۰].

فرض کنید α_a بزرگترین مقسوم‌علیه فرد عدد طبیعی a و S_b مجموع زیر باشد:

$$S_b = \frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_b}{b} = \sum_{a=1}^{b} \frac{\alpha_a}{a}$$

ثابت کنید دنبالهٔ $\left\{\frac{S_b}{b}\right\}$ همگراست و حد آن‌را بیابید.

راه‌حل

بدیهی است که بزرگترین مقسوم‌علیه فرد عدد صحیح a، α_a، عددی است که پس از تقسیم کردن a تا حد امکان بر ۲ باقی می‌ماند:

$$a = 2^{r_a} \times \alpha_a$$

در اینجا 2^{r_a} بزرگترین توان عدد ۲ است که a را می‌شمارد؛ مثلاً $\alpha_{68} = 17$ (زیرا $17 \times 2^2 = 68$) و $\alpha_{69} = 69$ (زیرا $69 \times 2^0 = 69$). در نتیجه $\frac{\alpha_a}{a} = \frac{1}{2^{r_a}}$ و S_b برابر است با

$$S_b = \frac{1}{2^{r_1}} + \frac{1}{2^{r_2}} + \frac{1}{2^{r_3}} + \cdots + \frac{1}{2^{r_b}}$$

حال، عددهای صحیح بسیاری وجود دارند که بزرگترین توان عدد ۲ در ساختمان آنها یکسان است. برای مثال، بزرگترین توان ۲ که هریک از عددهای ۱۲، ۲۸ و ۵۲ را می‌شمارد $4 = 2^2$ است. درصورتی که بتوانیم تعیین کنیم که چه تعدادی از جمله‌های S_b برابر با $\frac{1}{2^0}$ است، چه تعدادی برابر با $\frac{1}{2^1}$ است و الی آخر، می‌توانیم مقدار سری S_b را به‌دست آوریم. همان‌طور که گفتیم، به‌ازای هر عدد صحیح مانند a در $\{1, 2, \cdots, b\}$، اگر بزرگترین توان ۲ که آن‌را می‌شمارد 2^k باشد، $\frac{1}{2^k}$ هم در مجموع ظاهر می‌شود. خوشبختانه می‌توانیم این عددهای صحیح را به‌روش زیر بشماریم.

تعداد مضربهای ۲^k که کوچکتر از b یا مساوی با آن هستند، برابر است با $[b/۲^k]$، یعنی جزءِ صحیح $b/۲^k$. فقط به عددهایی علاقه‌مندیم که ۲^k بزرگترین توانی از ۲ است که آنها را می‌شمارد و نمی‌خواهیم عددهایی را که بر $۲^{k+۱}$ هم بخش‌پذیرند به حساب بیاوریم. ولی مضربها ۲^k یکی‌درمیان به‌شکل $۲^k \times$(عددی زوج)، یعنی به‌شکل $۲^k \times ۲t$، هستند، و در نتیجه چنین عددهایی مضرب $۲^{k+۱}$ هستند. از آنجا که تعداد مضربهای ناخواسته $۲^{k+۱}$ در $\{۱, ۲, \cdots, b\}$ برابر با $[b/۲^{k+۱}]$ است، دفعاتی که ۲^k به‌عنوان بزرگترین توان ۲ ظاهر می‌شود دقیقاً برابر است با

$$\left[\frac{b}{۲^k}\right] - \left[\frac{b}{۲^{k+۱}}\right]$$

بنابراین، سهم چنین جمله‌هایی در مجموع S_b برابراست با

$$\left\{\left[\frac{b}{۲^k}\right] - \left[\frac{b}{۲^{k+۱}}\right]\right\} \times \frac{۱}{۲^k}$$

و مجموع کل به‌صورت زیر است

$$S_b = \sum_{k \geqslant ۰} \left\{\left[\frac{b}{۲^k}\right] - \left[\frac{b}{۲^{k+۱}}\right]\right\} \times \frac{۱}{۲^k}$$

در این مجموع، جمله‌ها تا جایی که ۲^k بیشتر از b نشده است غیرصفرند و پس از آن $[b/۲^k] = ۰$.

اگر چند جملهٔ اول این مجموع را بسط دهیم و ساده کنیم، دستور سودمند دیگری برای S_b به‌دست می‌آید:

$$S_b = \left\{\left[\frac{b}{۲^۰}\right] - \left[\frac{b}{۲^۱}\right]\right\} \times \frac{۱}{۲^۰} + \cdots$$

و نتیجه می‌گیریم

$$S_b = b - \sum_{k \geqslant ۱} \frac{۱}{۲^k} \left[\frac{b}{۲^k}\right]$$

اینک، بنابر تعریف $[x]$، بدیهی است که $[x]$ از x بیشتر نیست و هیچ‌گاه برابر با $x - ۱$ نیز نمی‌شود:

$$x - ۱ < [x] \leqslant x$$

در نتیجه، به‌ازای هر k، $k \geqslant ۱$.

$$\frac{b}{۲^k} - ۱ < \left[\frac{b}{۲^k}\right] \leqslant \frac{b}{۲^k}$$

اگر دو طرف نابرابری بالا را در $\frac{۱}{۲^k}$ ضرب کنیم حاصل می‌شود

$$\frac{b}{۴^k} - \frac{۱}{۲^k} < \frac{۱}{۲^k} \left[\frac{b}{۲^k}\right] \leqslant \frac{b}{۴^k}$$

با جمع کردن نابرابریهای بالا به‌دست می‌آوریم

$$b \sum_{k \geqslant ۱} \frac{۱}{۴^k} - \sum_{k \geqslant ۱} \frac{۱}{۲^k} < \sum_{k \geqslant ۱} \frac{۱}{۲^k} \left[\frac{b}{۲^k}\right] \leqslant b \sum_{k \geqslant ۱} \frac{۱}{۴^k}$$

با محاسبهٔ مجموع این سریهای هندسی به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{k\geqslant ۱} \frac{۱}{۴^k} = \frac{\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۳}$$

و

$$\sum_{k\geqslant ۱} \frac{۱}{۲^k} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۱$$

و در نتیجه

$$\frac{b}{۳} - ۱ < \sum_{k\geqslant ۱} \frac{۱}{۲^k}\left[\frac{b}{۲k}\right] \leqslant \frac{b}{۳}$$

با ضرب کردن این نابرابریها در ۱−، جهت آنها عوض می‌شود و نتیجه می‌گیریم

$$-\frac{b}{۳} \leqslant -\sum_{k\geqslant ۱} \frac{۱}{۲^k}\left[\frac{b}{۲^k}\right] < ۱ - \frac{b}{۳}$$

اگر b را به سه طرف اضافه کنیم نتیجه می‌شود

$$\frac{۲}{۳}b \leqslant S_b < ۱ + \frac{۲}{۳}b$$

و سرانجام اگر طرفین این نابرابریها را بر b تقسیم کنیم،

$$\frac{۲}{۳} \leqslant \frac{S_b}{b} < \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{b}$$

و در نتیجه

$$\lim_{b\to\infty} \frac{S_b}{b} = \frac{۲}{۳}$$

مسألهٔ ۳

در آخر، مسأله‌ای از المپیاد سراسری ۱۹۸۴ اتحاد جماهیر شوروی می‌آوریم [۱۹۸۶، ۲۳۵].

فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$ و x_n چهار عدد طبیعی و یا بیشتر باشند که به‌ترتیب روی دایره‌ای قرار گرفته‌اند و مجموع همسایه‌های هریک از x_iها مضربی از خودش است؛ یعنی $\frac{x_{i-۱}+x_{i+۱}}{x_i} = k_i$، که در آن k_i عددی طبیعی است (و $x_{n+۱} = x_۱$). ثابت کنید S_n، یعنی مجموع همهٔ این k_iها، همواره بزرگتر از $۲n$ یا مساوی با آن است، ولی هیچ‌گاه برابر با $۳n$ نمی‌شود؛ به‌عبارت دیگر،

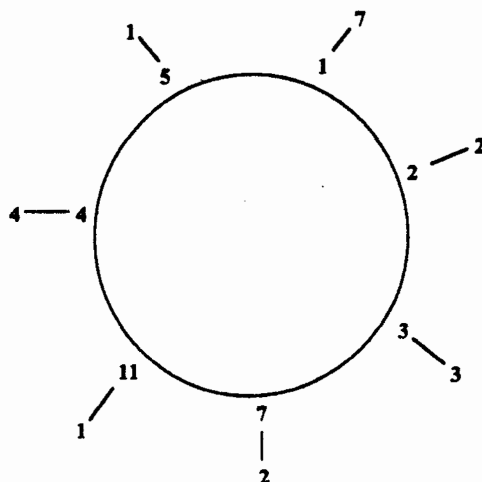
$$۲n \leqslant S_n < ۳n$$

در شکل ۱۰۶، در حالتی که $n = ۷$ مثالی آمده است:

$$S_۷ = ۷ + ۲ + ۳ + ۲ + ۱ + ۴ + ۱ = ۲۰$$

و در نتیجه

$$۱۴ \leqslant S_۷ = ۲۰ < ۲۱$$



شکل۱۰۶

راه‌حل

بدیهی است که به‌ازای هر i، عبارت

$$S_n = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$
$$= \frac{x_n + x_2}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_2 + x_4}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1} + x_1}{x_n}$$

شامل هر دو کسر $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ و $\frac{x_i}{x_{i+1}}$ است (به‌خاطر بیاورید که $x_{n+1} = x_1$). چون به‌ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت مانند a و b، $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ بزرگتر از ۲ یا مساوی با آن است، نتیجه می‌شود

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} + \frac{x_i}{x_{i+1}} \right) \geqslant 2n$$

اینک به حکم دشوارتر می‌پردازیم، یعنی $S_n < 3n$.

با توجه به اینکه حکم در مورد سه عدد صحیح برقرار است، جورج با تیزهوشی برهان استقرایی خود را از حالتی که $n = 3$ (و نه حالتی که $n = 4$ و مفصلتر است) آغاز می‌کند.

الف) $n = 3$:

$$S_3 = \frac{x_3 + x_2}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_2 + x_1}{x_3}$$

ممکن است همهٔ x_iها با هم برابر باشند. در این صورت، به‌ازای هر i، $k_i = 2$ و به‌آسانی درمی‌یابیم

$$S_3 = 2 + 2 + 2 = 6 < 3 \times 3 = 3n$$

بنابراین، فرض کنید دو تا از عددهای x_1، x_2 و x_3 نابرابر و طوری شماره‌گذاری شده باشند که x_1 بزرگترین آنها و x_3 کوچکترین آنها باشد. نه بزرگترین عدد لزوماً منحصر به‌فرد است و نه کوچکترین

عدد، و در حقیقت در مورد $x_۲$ سه حالت وجود دارد:

$$x_۱ > x_۲ > x_۳,\ \ x_۱ > x_۲ = x_۳,\ \ x_۱ = x_۲ > x_۳$$

در هر صورت، همواره می‌توانیم دو رابطهٔ زیر را بپذیریم:

$$x_۱ \geqslant x_۲,\ \ x_۱ > x_۳$$

در نتیجه

$$۲x_۱ = x_۱ + x_۱ > x_۲ + x_۳$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$k_۱ = \frac{x_۲ + x_۳}{x_۱} < ۲$$

چون $k_۱$ عددی طبیعی است، باید $k_۱ = ۱$ و در نتیجه $x_۱ = x_۲ + x_۳$. اگر در $S_۳$ این مقدار را به‌جای $x_۱$ بگذاریم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} S_۳ = k_۱ + k_۲ + k_۳ &= ۱ + \frac{x_۱ + x_۳}{x_۲} + \frac{x_۱ + x_۲}{x_۳} \\ &= ۱ + \frac{x_۲ + ۲x_۳}{x_۲} + \frac{۲x_۲ + x_۳}{x_۳} \\ &= ۱ + \left(۱ + \frac{۲x_۳}{x_۲}\right) + \left(\frac{۲x_۲}{x_۳} + ۱\right) \end{aligned}$$

چون $k_۱$ و $k_۲$ عددهایی صحیح‌اند، پس کسرهای موجود در سمت راست عبارت بالا نیز عددهایی صحیح‌اند و چون این عددها به‌وضوح مثبت‌اند، درواقع باید عددهایی طبیعی باشند. ولی حاصل‌ضرب آنها، $\left(\frac{۲x_۲}{x_۳}\right)\left(\frac{۲x_۳}{x_۲}\right)$، برابر با ۴ است و در نتیجه مقادیر آنها باید (۲ و ۲) یا (۱ و ۴) باشد. بنابراین، در هر حالت مجموع آنها از ۵ بیشتر نیست. بنابراین

$$S_۳ \leqslant ۱ + ۱ + ۱ + ۵ = ۸ < ۳ \times ۳ = ۳n$$

بنابراین حکم به‌ازای $n = ۳$ درست است.

ب) اینک فرض کنید که به‌ازای nای، $n - ۱ \geqslant ۳$، $S_{n-۱} < ۳(n-۱)$ و $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_n\}$ مجموعهٔ مناسبی از n عدد صحیح باشد.

به‌نظر می‌رسد که برهان بالا در حالت کلی نیز کارایی دارد. اگر همهٔ x_iها برابر باشند، فوراً نتیجه می‌گیریم

$$S_n = ۲n < ۳n$$

و در نتیجه فرض می‌کنیم بین x_iها دست‌کم دو مقدار متفاوت وجود داشته باشد.

بازهم توجه خود را به x_iای جلب می‌کنیم که ماکسیمم است. روشن است که ممکن است هر دو همسایهٔ عدد ماکسیمم x_i همین مقدار ماکسیمم باشند. با وجود این، چون بین x_iها دو مقدار متفاوت

وجود دارد، عددی ماکسیمم مانند x_i وجود دارد که دست‌کم یک همسایهٔ کوچکتر دارد. فرض کنید x_n چنین عدد ماکسیممی باشد. در این صورت می‌توانیم مانند بالا استدلال کنیم:

$$۲x_n = x_n + x_n > x_{n-۱} + x_۱ \Rightarrow k_n = \frac{x_{n-۱} + x_۱}{x_n} < ۲$$

و در نتیجه $k_n = ۱$ و $x_n = x_{n-۱} + x_۱$.

از این‌رو

$$k_۱ = \frac{x_n + x_۲}{x_۱} = \frac{x_{n-۱} + x_۱ + x_۲}{x_۱} = ۱ + \frac{x_{n-۱} + x_۲}{x_۱}$$

در نتیجه کسر

$$r_۱ = \frac{x_{n-۱} + x_۲}{x_۱}$$

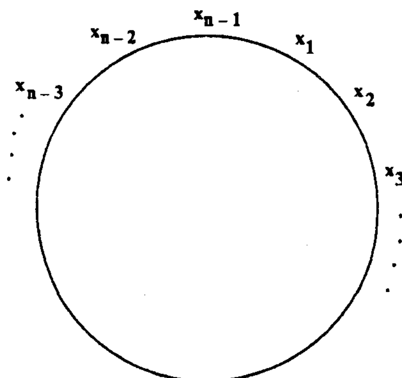
باید عددی طبیعی باشد. به همین ترتیب،

$$k_{n-۱} = \frac{x_{n-۲} + x_n}{x_{n-۱}} = \frac{x_{n-۲} + x_{n-۱} + x_۱}{x_{n-۱}} = ۱ + \frac{x_{n-۲} + x_۱}{x_{n-۱}}$$

و در نتیجه $s = \frac{x_{n-۲} + x_۱}{x_{n-۱}}$ باید عددی طبیعی باشد. خلاصه اینکه، می‌توان نوشت $k_۱ = ۱ + r$ و $k_{n-۱} = ۱ + s$ که در آنها r و s عددهایی طبیعی‌اند.

اینک مجموعهٔ $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_{n-۱}\}$ را در نظر بگیرید که از حذف این عدد ماکسیمم، x_n، به‌دست می‌آید. پرسشی که مطرح است این است که آیا می‌توان فرض استقرا را دربارهٔ این مجموعهٔ کوچک شده به‌کار برد؟ به‌عبارت دیگر، آیا همهٔ کسرهای وابسته، $k'_۱$، $k'_۲$، $\cdots$ و $k'_{n-۱}$، عددهایی صحیح‌اند؟ از آنجا که مقادیر $k'_۲$، $k'_۳$، $\cdots$ و $k'_{n-۲}$ تغییر نکرده‌اند (یعنی $k'_۲ = k_۲$، $k'_۳ = k_۳$، $\cdots$ و $k'_{n-۲} = k_{n-۲}$)، همه چیز به $k'_۱$ و $k'_{n-۱}$ بستگی دارد. ولی

$$k'_۱ = \frac{x_{n-۱} + x_۲}{x_۱} \ (= r \ \text{عدد صحیح}), \ k'_{n-۱} = \frac{x_{n-۲} + x_۱}{x_{n-۱}} \ (= s)$$



شکل ۱۰۷

بنابراین، واقعاً می‌توان فرض استقرا را دربارهٔ این مجموعه به‌کار برد. در نتیجه

$$S_{n-۱} = r + k_۲ + k_۳ + \cdots + k_{n-۲} + s < ۳(n-۱)$$

یادآور می‌شویم که، در مجموعهٔ کامل $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_n\}$، $k_۱ = ۱ + r$ و $k_{n-۱} = ۱ + s$، بنابراین

$$\begin{aligned} S_n &= k_۱ + k_۲ + \cdots + k_{n-۱} + k_n \\ &= (۱ + r) + k_۲ + \cdots + k_{n-۲} + (۱ + s) + k_n \\ &= ۱ + [r + k_۲ + \cdots + k_{n-۲} + s] + ۱ + ۱ \quad (\text{به‌خاطر بیاورید که } k_n = ۱) \\ &= ۱ + S_{n-۱} + ۱ + ۱ \\ &= S_{n-۱} + ۳ \\ &< ۳(n-۱) + ۳ \\ &= ۳n \end{aligned}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

نابرابری میانگین توانی

فرض کنید بخواهیم ثابت کنیم که به‌ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند a، b و c، مقدار کسر

$$\frac{(a+۲b+۳c)^۲}{a^۲+۲b^۲+۳c^۲}$$

هرگز بزرگتر از ۶ نمی‌شود و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a=b=c$. وسیلهٔ مناسبی برای انجام این کار، نابرابریی موسوم به نابرابری میانگین توانی تعمیم یافته است. این نابرابری این است که به‌ازای $s<t$،

$$\left(\frac{p_۱a_۱^t+p_۲a_۲^t+\cdots+p_na_n^t}{p_۱+p_۲+\cdots+p_n}\right)^{۱/t}\leqslant\left(\frac{p_۱a_۱^s+p_۲a_۲^s+\cdots+p_na_n^s}{p_۱+p_۲+\cdots+p_n}\right)^{۱/s}$$

که در آن pها و aها عددهایی حقیقی و مثبت و دلخواه‌اند و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که همهٔ aها با هم برابر باشند.

در مورد مسألهٔ موردنظر، اگر $t=۱$ و $s=۲$ و $p_۱=۱$، $p_۲=۲$ و $p_۳=۳$، از این نابرابری نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{a+۲b+۳c}{۶}\right)^۱\leqslant\left(\frac{a^۲+۲b^۲+۳c^۲}{۶}\right)^{۱/۲}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{(a+۲b+۳c)^۲}{۳۶}\leqslant\frac{a^۲+۲b^۲+۳c^۲}{۶}$$

که از آن نابرابری مطلوب،

$$\frac{(a+۲b+۳c)^۲}{a^۲+۲b^۲+۳c^۲}\leqslant ۶$$

فوراً نتیجه می‌شود.

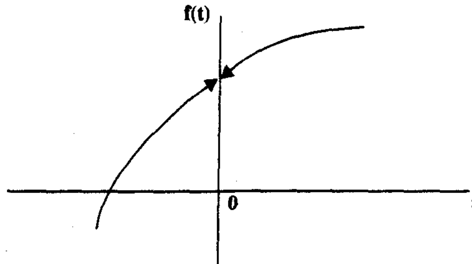
بنابراین، برخی اوقات این نابرابری دقیقاً همان وسیلهٔ مناسبی است که با آن می‌توان وضعیت دشواری را حل‌وفصل کرد. متأسفانه دربارهٔ این نابرابری زیاد صحبت نشده است، و امیدوارم که برهان زیر مورد توجه خواننده قرار بگیرد. اگرچه ممکن است به‌نظر برسد که در بعضی مواقع رشته بحث از

دست ما خارج می‌شود، ولی همواره می‌توان این‌گونه موارد را به‌سادگی جمع‌وجور کرد. در تمام برهان از ریاضیات سال اول دانشگاه استفاده شده است.

این نابرابری اساساً این است که به‌شرطی‌که aها برابر نباشند، تابع

$$f(t) = \left(\frac{p_۱ a_۱^t + p_۲ a_۲^t + \cdots + p_n a_n^t}{p_۱ + p_۲ + \cdots + p_n}\right)^{۱/t}$$

برحسب t اکیداً صعودی است. (بدیهی است که اگر همهٔ aها برابر با k باشند، آنگاه به‌ازای هر t، $f(t) = k$ که تابعی اکیداً صعودی نیست.) بنابراین فرض می‌کنیم همهٔ aها با هم برابر نباشند و نیز توجه می‌کنیم که نابرابری در مورد همهٔ عددهای حقیقی (و نه فقط عددهای حقیقی مثبت) بیان شده است. بنابراین، پیش از اینکه برهان را آغاز کنیم، باید مقدار این تابع را به‌ازای $t = ۰$ تعیین کنیم. همان‌طور که خواهیم دید، با کمی کوشش می‌توانیم ثابت کنیم که وقتی t، چه از راست و چه از چپ، به ۰ میل کند، تابع $f(t)$ به حدی مانند L میل می‌کند، و در نتیجه بدیهی است که فرض کنیم $f(۰) = \text{حد}_{t\to ۰} f(t)$، و بنابراین تابع $f(t)$ در $t = ۰$ پیوسته است. بر این اساس، اگر بتوانیم ثابت کنیم که به‌ازای $t < ۰$ و نیز $t > ۰$، تابع $f(t)$ اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود که $f(t)$ همه‌جا اکیداً صعودی است.



شکل۱۰۸

روشن است که اگر $\log f(t) \to k$، آنگاه $f(t) \to$ (آنتی‌لگاریتم k). بنابراین برای تعیین $(f(t))$حد از $[\log f(t)]$حد استفاده می‌کنیم. اگر مجموع $p_۱ + p_۲ + \cdots + p_n$ را با P_n نشان دهیم و دستورهای

$$\frac{d[\log f(x)]}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \frac{d(a^x)}{dx} = a^x \cdot \log a$$

را به یاد بیاوریم، از قاعدهٔ لوپیتال نتیجه می‌شود

$$\underset{t\to ۰}{\text{حد}}[\log f(t)] = \underset{t\to ۰}{\text{حد}}\left[\frac{\log \frac{p_۱ a_۱^t + \cdots + p_n a_n^t}{P_n}}{t}\right] \quad \text{(که به‌ازای } t = ۰ \text{ به‌صورت } \tfrac{۰}{۰} \text{ است)}$$

$$= \underset{t\to ۰}{\text{حد}} \frac{\frac{P_n}{p_۱ a_۱^t + \cdots + p_n a_n^t}\left[\frac{p_۱ a_۱^t \log a_۱ + \cdots + p_n a_n^t \log a_n}{P_n}\right]}{۱}$$

اینک، t چه از راست به ۰ میل کند و چه از چپ، $a_i^t \to ۱$ و در نتیجه حد بالا برابر می‌شود با

$$L = \frac{p_۱ \log a_۱ + \cdots + p_n \log a_n}{P_n} = \log\left[a_۱^{p_۱} a_۲^{p_۲} \cdots a_n^{p_n}\right]^{۱/P_n}$$

یا اگر آنتی‌لگاریتم بگیریم می‌توانیم تعریف کنیم

$$f(\circ) = \underset{t\to\circ}{\text{حد}} f(t) = [a_\backslash^{p_\backslash} a_\Upsilon^{p_\Upsilon} \cdots a_n^{p_n}]^{\backslash/P_n}$$

سمت راست این تساوی میانگین هندسی مجموعه‌ای متشکل از P_n عدد است که هر a_i در آن p_i بار تکرار شده است.

حال که $f(\circ)$ را به‌طور مناسبی تعریف کردیم، می‌توانیم، به‌طور معمول، حکم مطلوب را با اثبات اینکه $f'(t)$ به‌ازای $t > \circ$ و $t < \circ$ مثبت است، ثابت کنیم. بازهم روشمان استفاده از لگاریتم $f(t)$ است.

چون همهٔ p_iها و a_iها عددهایی مثبت‌اند، پس $f(t)$ نیز به‌ازای هر مقداری از t مثبت است. در نتیجه، مشتق $\log f(t)$، یعنی

$$D = \frac{d[\log f(t)]}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

همواره با $f'(t)$ هم‌علامت است، مگر اینکه هردو آنها برابر با ۰ باشند. درستی این مطلب با ضرب کردن عبارت بالا در عدد نامنفی t^Υ تغییر نمی‌کند. بنابراین، تابع $F(t)$ را در نظر می‌گیریم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(t) = t^\Upsilon D = t^\Upsilon \frac{f'(t)}{f(t)}$$

مقدار تابع $F(t)$ هنگامی مثبت است که D نیز مثبت باشد، و در این حالت D و $f'(t)$ هم‌علامت‌اند. بنابراین، اگر بتوانیم ثابت کنیم که وقتی t صفر نیست، مقدار $F(t)$ مثبت است، آنگاه نتیجه می‌شود که D و در نتیجه $f'(t)$ نیز به‌ازای tهای ناصفر مثبت‌اند. دلیل استفاده از $F(t)$ این است که کار با این تابع نسبت به $f'(t)/f(t)$ آسانتر است.

چون $F(t) = t^\Upsilon D = t^\Upsilon \times \dfrac{d[\log f(t)]}{dt}$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
&= t^\Upsilon \left[\frac{\backslash}{t}\left[\frac{P_n}{p_\backslash a_\backslash^t + \cdots + p_n a_n^t} \times \frac{p_\backslash a_\backslash^t \log a_\backslash \cdots + p_n a_n^t \log a_n}{P_n}\right]\right] \\
&\quad + t^\Upsilon \left(-\frac{\backslash}{t^\Upsilon}\right) \times \log \frac{p_\backslash a_\backslash^t + \cdots + p_n a_n^t}{P_n} \\
&= t \times \frac{p_\backslash a_\backslash^t \log a_\backslash + \cdots + p_n a_n^t \log a_n}{p_\backslash a_\backslash^t + \cdots + p_n a_n^t} - \log \frac{p_\backslash a_\backslash^t + \cdots + p_n a_n^t}{P_n}
\end{aligned}$$

یعنی

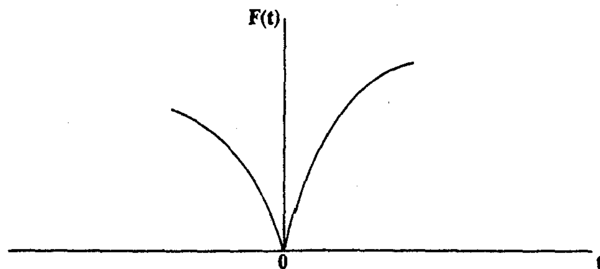
$$F(t) = t \times \frac{\sum p_i a_i^t \log a_i}{\sum p_i a_i^t} - \log \frac{\sum p_i a_i^t}{P_n}$$

به‌خاطر آورید که آنچه می‌خواهیم ثابت کنیم این است که به‌ازای هر t، $t \neq \circ$، مقدار $F(t)$ مثبت است. همان‌طور که خواهیم دید، معلوم می‌شود که به‌ازای $t \neq \circ$، علامت $F'(t)$ با علامت t یکی است، و در نتیجه به‌ازای مقادیر منفی t، تابع $F(t)$ نزولی و به‌ازای مقادیر مثبت t، تابع $F(t)$ صعودی است (به شکل ۱۰۹ نگاه کنید). بنابراین $F(t)$ فقط در $t = \circ$ مینیمم دارد و اگر $F(\circ)$ نامنفی باشد، آنگاه به‌ازای هر $t \neq \circ$، مقدار $F(t)$ اکیداً مثبت است. ولی بدیهی است که $F(\circ)$ نامنفی است زیرا

اگر در عبارت بالا فرض کنیم $t = ۰$، فوراً نتیجه می‌شود.

$$F(۰) = ۰ - \log ۱ = ۰$$

بنابراین فقط باقی‌مانده که مشتق $F(t)$ را حساب و ثابت کنیم که این مشتق به‌ازای هر t، $t \neq ۰$، با t هم‌علامت است.



شکل۱۰۹

اگر از $F(t)$ مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود

$$F'(t) = t \times \frac{(\sum p_i a_i^t)(\sum p_i a_i^t \log^۲ a_i) - (\sum p_i a_i^t \log a_i)(\sum p_i a_i^t \log a_i)}{(\sum p_i a_i^t)^۲}$$
$$+ (۱) \times \frac{\sum p_i a_i^t \log a_i}{\sum p_i a_i^t} - \frac{P_n}{\sum p_i a_i^t} \times \frac{\sum p_i a_i^t \log a_i}{P_n}$$
$$= t \times \frac{(\sum p_i a_i^t)(\sum p_i a_i^t \log^۲ a_i) - (\sum p_i a_i^t \log a_i)^۲}{(\sum p_i a_i^t)^۲}$$

بدیهی است که مخرج این کسر مثبت است و، همان‌طور که خواهیم دید، از نابرابری کوشی نتیجه می‌شود که صورتش نیز باید نامنفی باشد. همان‌طور که می‌دانید، نابرابری کوشی دربارهٔ بردارهایی مانند

$$u = (u_۱, u_۲, \cdots, u_n), \ v = (v_۱, v_۲, \cdots, v_n)$$

و خودش چنین است

$$|u \cdot v| = |u||v| \cos\theta$$

$$\leqslant |u||v|$$

که در آن θ زاویهٔ بین دو بردار u و v است. اگر دو طرف این نابرابری را به توان ۲ برسانیم نتیجه می‌شود

$$(u_۱v_۱ + u_۲v_۲ + \cdots + u_nv_n)^۲ \leqslant (u_۱^۲ + u_۲^۲ + \cdots + u_n^۲)(v_۱^۲ + v_۲^۲ + \cdots + v_n^۲)$$

و در آن برابری برقرار است اگر و تنها اگر $\cos\theta = ۱$، یعنی اگر و تنها اگر $\frac{u_i}{v_i}$ها برابر باشند.
اینک به‌ازای

$$u_i = \sqrt{p_i a_i^t}, \ v_i = \sqrt{p_i a_i^t \log^۲ a_i}$$

در مورد صورت عبارت $F'(t)$، می‌توان نوشت

$$\left(\sum p_i a_i^t\right)\left(\sum p_i a_i^t \log^۲ a_i\right) - \left(\sum p_i a_i^t \log a_i\right)^۲ \geqslant ۰$$

که در آن برابری برقرار است اگر و تنها اگر $\frac{u_i}{v_i}$ برابر باشند. در نتیجه برابری وقتی و فقط وقتی برقرار است که

$$\frac{v_۱}{u_۱} = \frac{v_۲}{u_۲} = \cdots = \frac{v_n}{u_n}$$

به عبارت دیگر، با توجه به اینکه $v_i = u_i \log a_i$ شرط بالا معادل است با اینکه

$$\log a_۱ = \log a_۲ = \cdots \log a_n$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$$

بنابراین وقتی‌که همهٔ aها برابر نیستند، مانند حالتی که با آن مواجهیم، می‌توان نوشت

$$F'(t) = t \times (\text{کسری مثبت})$$

و حکم نهایی، یعنی اینکه به‌ازای هر t، $t \neq ۰$، $F'(t)$ و t هم‌علامت‌اند، به‌دست می‌آید.

در خاتمه، توجه کنید که نابرابری مشهور میانگین حسابی ـ میانگین هندسی حالت خاصی از این نتیجهٔ مهم است. چون $۱ > ۰ > ۱-$، پس وقتی‌که همهٔ aها برابر نیستند،

$$f(-۱) < f(۰) < f(۱)$$

ولی

$$f(۱) = \frac{p_۱ a_۱ + p_۲ a_۲ + \cdots + p_n a_n}{P_n}$$

یعنی $f(۱)$ برابر است با میانگین حسابی P_n عدد که در آنها a_i، p_i بار تکرار شده است (و آن‌را با A نشان می‌دهیم) و همان‌طور که گفتیم، $f(۰)$ میانگین هندسی این اعداد است (و آن‌را با G نشان می‌دهیم) و سرانجام اینکه

$$f(-۱) = \frac{P_n}{\frac{p_۱}{a_۱} + \frac{p_۲}{a_۲} \cdots + \frac{p_n}{a_n}}$$

یعنی $f(-۱)$ میانگین همساز این اعداد است. در نتیجه

$$H \leqslant G \leqslant A$$

که در آن برابری برقرار است اگر و تنها اگر همهٔ aها با هم برابر باشند.

مراجع

1. Mitrinovic, D. S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag Heidelberg, 1968, 76-77.
2. G. Polya and G. Szego, *Problems and Theorems in Analysis*, Springer - Verlag, 1972 edition, vol. 1, 69, problem 82.

نمایهٔ موضوعی

۲. جبر، نظریهٔ اعداد، احتمال، حسابان

۳. هندسه